یک روش گرادیان مزدوج ترکیبی برای حل معادلات غیرخطی یکنوا و کاربرد آن در تصویر برداری پزشکی

فرزاد راه‌پیمایی1 و لیلا بحری2

1 \* استادیار، گروه ریاضی، دانشگاه پیام‌نور، تهران، ایران

2 دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه ریاضی، دانشگاه پیام‌نور، تهران

rahpeyma\_83@yahoo.com

چکیده: در این مقاله با ترکیب روش‌های گرادیان مزدوج FR و LS یک روش گرادیان مزدوج ترکیبی برای حل معادلات غیرخطی یکنوا با قیدهای محدب معرفی می‌کنیم. با استفاده از روش تصویر تکرارهای تولید شده با روش جدید در داخل ناحیه محدب قرار می‌گیرند و جهت‌های تولید شده کاهشی کافی هستند. همگرایی سراسری تحت برخی فرض‌های استاندارد ثابت شده است. همچنین حذف نویز از تصاویر مختلف از جمله تصاویر پزشکی با یک معادله غیرخطی یکنوا معادل است. لذا روش گرادیان مزدوج ترکیبی را برای حذف نویز تصاویر مورد استفاده قرار می‌دهیم.

کلید واژه‌ها: روش گرادیان مزدوج، قیدهای محدب، معادلات یکنوا، تصاویر پزشکی.

1- مقدمه

فرض کنید یک مجموعه بسته، ناتهی و محدب باشد. معادله غیرخطی یکنوا با قیدهای محدب



را در نظر بگیرید که پیوسته و یکنوا است. برای حل (1) روش‌های مختلفی از جمله روش نیوتن [6]، روش شبه نیوتن [2] و روش لونبرگ-مارکورات [9] ارائه شده است. اگر بعد معادله غیرخطی بزرگ باشد روش تکراری گرادیان مزدوج بسیار مؤثر خواهد بود. در این روش با شروع از نقطه آغازین تکرارهای بعدی به‌صورت



خواهند بود که در آن با روش‌های جستجوی خطی محاسبه می‌شود و جهت به‌ازای در شرط کاهشی کافی



صدق می‌کند که  است. در روش‌های گرادیان مزدوج ساختار کلی جهت به‌صورت زیر است:



برای پارامتر گرادیان مزدوج انتخاب‌های مختلفی وجود دارد. فلچر و ریوز  [3] و لیو و استوری  [5] پارامترهای گرادیان مزدوج زیر را معرفی کردند:



که در آن  است.

**تعریف 1:** عملگر تصویر به‌صورت زیر می‌باشد



2- روش گرادیان مزدوج ترکیبی برای حل معادله غیرخطی

در این بخش با ترکیب پارامتر گرادیان مزدوج روش‌های و  یک روش ترکیبی جدید برای حل معادله غیرخطی (۱) معرفی می‌کنیم. در روش جدید جهت را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم



پارامتر را نیز با ترکیب محدب  و با به‌دست می‌آوریم



با جایگذاری (6) در (۵) جهت گرادیان مزدوج ترکیبی جدید به‌صورت زیر حاصل می‌شود



اکنون را طوری محاسبه می‌کنیم که جهت در شرط تزویج صدق کند. به عبارت دیگر



در نتیجه



که در آن



با استفاده از فرآیندی که در بالا شرح داده شد به بیان گام‌های روش گرادیان مزدوج ترکیبی جدید می‌پردازیم.

**الگوریتم 1 **

**گام اول:** نقطه آغازین و مقادیر ثابت و مثبت، ،  و را انتخاب کن و قرار بده .

**گام دوم:** اگر توقف کن. در غیراینصورت جهت را با (۵) محاسبه کن.

اگر پارامتررا با (6) محاسبه کن.

اگر قرار بده.

اگر قرار بده .

اگر قرار بده.

**گام سوم:** فرض کنید باشد. طول گامرا طوری می‌یابیم که در شرط جستجوی خطی زیر صدق کند



**گام چهارم:** تکرار آزمایشی جدید را به‌صورت محاسبه کن.

**گام پنجم:** اگر و  توقف کن. در غیراینصورت تکرار جدید را به‌صورت زیر محاسبه کن



که در آن



**گام ششم:** قرار بده  و به گام دوم برو.

2-1- آنالیز همگرایی

اکنون به بررسی همگرایی الگوریتم می‌پردازیم. برای این منظور فرض‌های زیر را در نظر می‌گیریم.

**(H1)** تابع درپیوسته لیپ‌شیتس است. یعنی ثابت وجود دارد به‌طوری‌که



**(H2)** مجموعه جواب برای معادله غیرخطی (۲) ناتهی است.

ابتدا نشان می‌دهیم جهت‌های تولید شده با (5) در شرط کاهشی کافی صدق می‌کنند [4].

**لم 1:** اگر جهت با (۵) تولید شده باشد آن‌گاه در شرط کاهشی کافی زیر صدق می‌کند



لم زیر به‌دست آوردن جواب تقریبی با الگوریتم ترکیبی جدید را تضمین می‌کند.

**لم 2:** الگوریتمخوش‌تعریف است [4].

اکنون همگرایی سراسری الگوریتم جدید تحت برخی فرض‌های استاندارد را به‌دست می‌‌آوریم.

**قضیه 1:** فرض کنید **(H1)** و **(H2)** برقرار باشند. در اینصورت دنباله تولید شده توسط الگوریتم  به جواب معادله غیرخطی (1) همگرای سراسری است.

3- روش گرادیان مزدوج ترکیبی برای رفع نویز تصاویر پزشکی

پردازش تصویری نقش مهمی در علوم پزشکی، علوم بیولوژیک، اقتصاد و مهندسی ایفا می‌کند [1]. فرض کنید  یک عملگر خطی باشد که  است. همچنین  یک برداری با تعداد مؤلفه‌های صفر زیاد (تنک) و بردار مشاهدات باشد که



هدف اصلی در رفع نویز تصاویر حل دستگاه معادلات خطی و بازسازی بردار می‌باشد. اما این دستگاه معادلات خطی یک مسأله بدوضع است و بی‌نهایت جواب دارد. برای رفع نویز از تصاویر تنک‌ترین جواب را از بین همه جواب‌های دستگاه معادلات خطی با حل مسأله بهینه‌سازی زیر انتخاب می‌کنیم



که در آن است. مسأله بهینه‌سازی (9) را می‌توان به‌صورت دیگری نیز بیان کرد. بردار  را به‌صورت



می‌نویسیم که در آن و  است. همچنین فرض کنید



بنابراین اگر برداری بعدی با مؤلفه‌های یک باشد آن‌گاه



پس مسأله (9) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم



با فرض





خواهیم داشت



چون ماتریس نیمه معین‌مثبت است لذا مسأله بهینه‌سازی (11) یک مسأله برنامه‌ریزی درجه دوم محدب خواهد بود که با معادله غیرخطی زیر معادل است



چون  پیوسته و یکنوا است لذا می‌توان آن را با الگوریتم  حل کرد.

3-1- نتایج عددی

اکنون از الگوریتم  برای بازسازی تصاویری که دارای نویز هستند استفاده می‌کنیم. در این الگوریتم از پارامترهای ، ،  و  استفاده می‌کنیم و تصاویر اصلی را به‌صورت  دچار نویز می‌کنیم که  نویز گاوسی است. نتایج حاصل برای رفع نویز از تصاویر را با نتایج روش‌های [7] و  [8] مقایسه می‌کنیم. تصاویر ستون در شکل 1 با روش جدید رفع نویز شده که نسبت به روش‌های دیگر دارای وضوح بهتری هستند.

|  |
| --- |
|  |
| شکل 1-تصویر نویزدار روش  روش   روش |

مراجع:

[1] M. R. Banham, and A. K. Katsaggelos, “Digital image restoration,” IEEE Signal Process. Mag. Vol. 14, No. 2, pp. 24-41, 1977.

[2] J. E., Dennis, and J. J. Moré, “A characterization of superlinear convergence and its appli-cation to quasi-Newton methods,” Math. Comput. Vol. 28, No. 126, pp. 549–560, 1974.

[3] R. Fletcher, and C. M. Reeves, “Function minimization by conjugate gradients,” Comput. J. Vol. 7, No. 2, pp.149–154, 1964.

[4] A. H. Ibrahim, P. Kumam, A. B. Abubakara, W. Jirakitpuwapat, and J. Abubakar, “A hybrid conjugate gradient algorithm for constrained monotone equations with application in compressive sensing,” Heliyon, Vol. 6, 2020, e03466.

[5] Y. Liu, and C. Storey, “Efficient generalized conjugate gradient algorithms,” part 1: theory, J. Optim. Theory Appl. Vol. 69, No. 1, pp.129–137, 1991.

[6] L. Qi, and J. Sun, “A nonsmooth version of Newton’s method,” Math. Program. Vol. 58, No. 1-3, pp. 353–367, 1993.

[7] Y. Xiao, and H. Zhu, “A conjugate gradient method to solve convex constrained monotone equations with applications in compressive sensing,” J. Math. Anal. Appl. Vol. 405, No. 1, pp. 310–319, 2013.

[8] Z. Wan, J. Guo, J. Liu, and W. Liu, “A modified spectral conjugate gradient projection method for signal recovery,” Signal Image Video Process. Vol. 12, No. 8, pp. 1455–1462, 2018.

[9] N. Yamashita, M. Fukushima, “On the rate of convergence of the Levenberg-Marquardt method,” in: Topics in Numerical Analysis, Springer, pp. 239–249, 2001.

A hybrid conjugate gradient algorithm for constrained monotone equations with application in medical imaging

1st Farzad Rahpeymaii1, 2nd Leila Bahri2  
  
1\* Department of Mathematics, Payame Noor University, Theran, Iran

2 Department of Mathematics, Payame Noor University, Theran, Iran

Rahpeyma\_83@yahoo.com

*Abstract*—*In this paper, we obtain a new conjugate gradient method to solve nonlinear monotone equations with convex constraints by combining FR and LS conjugate gradient methods. Using projection map the new iterations are placed in convex region and the search directions satisfy in the sufficient descent condition. The global convergence is stablished under some standard assumptions. Furthermore, impulse noise removal especially from medical imaging is also equivalent to a nonlinear monotone equation. Therefore, we use the new conjugate gradient method to impulse noise removal.*

Keywords— ***Conjugate gradient method,*** ***Convex constraints, Monotone equations, Medical imaging***