

# رویکرد کنترل بهینه برای مقابله با آفت در کشاورزی

دکتر علاءالدین ملک، حسن عباس زاده

دانشگاه تربیت مدرس دانشکده علوم ریاضی گروه ریاضیات کاربردی

## چکیده

در این پژوهش ما به بررسی یک سیستم دینامیکی شامل آفت-آفتکش-گیاه می پردازیم، که این سیستم با ورود یک منبع گیاهی به سیستم آفت-آفتکش به سیستم دینامیکی شکار-شکارچی-گیاه (یا به عبارت دیگر آفت-آفتکش-گیاه) تبدیل می شود، که در اینجا هدف ما مقابله با آفت و به حداکثر رساندن رشد گیاه در زمان نهایی با کمترین تلاش می باشد. ما در اینجا برای ریشه کن کردن آفات مستعد و همچنین به حداکثر رساندن منبع گیاهی موجود چهار استراتژی کنترل بهینه را به کار می گیریم که شامل کنترل بیولوژیکی، کنترل شیمیایی، کنترل تلفیقی با نقاط زمانی، تکانه ای ثابت و متغیر می باشد

## کلید واژه ها:

کنترل ضربه ای، مدیریت تلفیقی آفات، آفت مستعد، آفت عفونی، دشمن طبیعی

## مقدمه

در این پژوهش، به بررسی کنترل و مدیریت آفت ها در زمینه کشاورزی می پردازیم. کنترل آفات در کشاورزی از اهمیت بسیاری برخوردار است زیرا شیوع آفت ها می تواند با نابود کردن محصولات کشاورزی زیان اقتصادی زیادی را به همراه داشته باشند. روش سنتی کنترل آفت پاشیدن انواع زیادی از سموم دفع آفات شیمیایی (حشره کشهای شیمیایی) بر روی محصولات زراعی است. با این حال، آلودگی به سموم دفع آفات، برای انسان و حشرات مفید به یک مسئله مهم تبدیل شده است. با تجمع مواد شیمیایی خطرناک در زنجیره غذایی تأثیرات زیان آوری بر موجودات غیر هدف دارد. علاوه بر این، استفاده بیش از حد از سموم دفع آفات شیمیایی (آفت کش های شیمیایی) منجر به مقاوم شدن آفات نسبت به آفت کش ها می شود. بنابراین، یک استراتژی مؤثرتر و ایمن تر، یعنی مدیریت تلفیقی آفات (IPM) بیشتر مورد استفاده قرار می گیرد. تجربه نشان داده است که نسبت به روشهای کلاسیک مانند کنترل شیمیایی و کنترل بیولوژیکی مؤثرتر است. مدیریت آفات (IPM) شامل مجموعه ای از فعالیتهای به هم پیوسته، هماهنگ و نسبتاً طولانی مدت برای کاهش سطح خسارت می باشد. به طوریکه از یک سو گیاه و محصول متحمل خسارت نگردد و از سوی دیگر عوامل زیان آور گسترش نیافته و طغیان نکنند. ضمن آن که در تمام موارد و مراحل حفظ محیط زیست باید مورد توجه قرار گیرد.

## فرمول بندی مسئله

بر اساس مدل شکار - شکارچی پیشنهادی در منبع [۴]، یک مدل  $IPM$  (مدیریت تلفیقی آفت) تهیه شده است که شامل یک منبع گیاهی برای آفت است. در زمان  $t \neq nT, n = 1, 2, \dots, N$  سه گونه گیاه، آفت و شکارچی در دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی که به صورت زیر نمایش داده شده است و در زمان  $t = nT$  کنترل تکانشی پیاده سازی می شود مدل مورد نظر در ذیل ارائه شده است:

$$\begin{cases} \dot{S} = rS(1 - \frac{S+I}{K}) - \lambda IS - \frac{\alpha_2 SP}{1+\alpha_2 S} + \frac{\beta_1 SX}{1+\alpha_1 X} \\ \dot{I} = \lambda IS - \mu I \\ \dot{P} = \frac{\beta_2 SP}{1+\alpha_2 S} - \gamma P \\ \dot{X} = bX(1 - \frac{X}{L}) - \frac{\alpha_1 SX}{1+\alpha_1 X} \end{cases}, t \neq nT \quad (1)$$

و کنترل تکانه ای به صورت زیر فرمولبندی شده است:

$$\begin{cases} \Delta S(t) = -\theta_1 S(t), \\ \Delta I(t) = -\theta_2 I(t) + u, \\ \Delta P(t) = -\theta_3 P(t) + v, \\ \Delta X(t) = 0, \end{cases}, \quad t = nT$$

حالت های  $S(t)$  و  $I(t)$  به ترتیب چگالی آفت های مستعد و عفونی را مشخص می کنند.  $P(t)$  نیز به عنوان چگالی دشمنان طبیعی در نظر گرفته شده است، در اینجا آفت های مستعد و عفونی به عنوان طعمه برای شکارچی  $P(t)$  در نظر گرفته می شوند اما فرض بر این است که شکارچیان فقط طعمه مستعد را شکار می کنند. در عین حال، آفت مستعد فقط برای  $X(t)$  است. یعنی آفت نه تنها از  $X(t)$  تغذیه می کند بلکه از برخی منابع غذایی جایگزین نیز تغذیه می کند. از این رو، دینامیک  $S(t)$  کاملاً به  $X(t)$  بستگی ندارد. این مدل با فرضیات زیر ساخته شده است:  $r$  نرخ رشد آفات طعمه،  $K$  ظرفیت حمل آفات،  $\lambda$  تعداد تماس برای هر طعمه عفونی با طعمه مستعد در واحد زمان،  $a$  و  $\alpha$  ثابت های مثبت،  $\beta/\alpha$  نرخ تبدیل از طعمه به شکارچی،  $u$  جمعیت آفات عفونی رها شده،  $v$  جمعیت شکارچی رها شده،  $\theta_1$  درصدی از آفات مستعد بدلیل اسپری سموم دفع آفات،  $\theta_2$  درصدی از آفات عفونی بدلیل اسپری سموم دفع آفات،  $\theta_3$  درصدی از دشمنان طبیعی بدلیل اسپری سموم دفع آفات،  $\mu$  میزان مرگ و میر طعمه های عفونی،  $\gamma$  میزان مرگ و میر شکارچیان،  $L$  ظرفیت حمل گیاه و  $T$  دوره (تناوب) سم پاشی و رها سازی آفت عفونی و شکارچیان می باشد. در میان جمعیت طعمه بیماری وجود دارد، و میزان شیوع بیماری در بین آنها به صورت عبارت کلاسیک دوسویی  $\lambda I(t)S(t)$  است. در اینجا فرض شده است که شکارچیان فقط طعمه مستعد را می گیرند و فقط آفات مستعد توانایی تغذیه گیاهان را دارند. فرض بر این است که آفات آلوده برای شکار مواد غذایی بسیار ضعیف هستند. برای کاهش قابل توجه آسیب های دشمنان طبیعی آفت، سموم دفع آفات به جای آنکه طیف گسترده ای باشد، هدفمند انتخاب می شوند. از این رو، دو کنترل تکانه ای، سم پاشی سموم دفع آفات و رها سازی آفات آلوده و شکارچیان، در همان نمونه ها اجرا می شوند. در مدل (۴)، پس از ورود جمعیت گیاهی به عنوان آغاز زنجیره غذایی به سیستم، جمعیت آفت نه تنها به سطح متوسط می رسد بلکه مقدار انواع غذاهایی را که می خورد افزایش می دهد. علاوه بر این، جمعیت شکارچیان به بالای زنجیره غذایی تکامل می یابد. علاوه بر این، ما هر دو دینامیک اکولوژیکی و اپیدمیولوژیکی را برای مطالعه استراتژی های کنترل تکانه ای آفات به مدل خود اضافه می کنیم. سپس، ما نشان خواهیم داد که پاتوژن عفونی و شکار جمعیت آفات متقابل متمایز اما مشابه هستند [۵] برای راحتی مجدداً پارامترها را در جدول زیر باز نویسی می کنیم:

## پایداری جواب دوره ای نابود کردن آفات مستعد

از آنجا که آفت عفونی برای گیاه مضر نیست، ما پایداری جواب دوره ای نابود کردن آفات مستعد را مورد بررسی قرار می دهیم. هنگامی که زمان به بی نهایت گرایش پیدا می کند، طعمه مستعد ممکن است تمایل به انقراض داشته باشد. طبیعی است که انتظار داشته باشیم این مورد پایدار و دوره ای باشد، زیرا آفت عفونی از  $X(t)$  تغذیه نمی کند. از این رو، در ادامه، وجود و پایداری جواب دوره ای نابود کردن آفات مستعد مورد مطالعه قرار می گیرد. هنگامی که  $S(t) \equiv 0$  برای همه  $t \geq 0$ ، معادله دوم و سوم از (۴) به صورت زیر باز نویسی می شوند در زمان  $t \neq nT$

$$\begin{cases} \dot{I}(t) = -\mu I(t) \\ \dot{P}(t) = -\gamma P(t) \end{cases} \quad (۲)$$

و در زمان  $t = nT$  کنترل تکانشی به صورت زیر پیاده سازی می شود

$$\begin{cases} I(t^+) = (1 - \theta_2)I(t) + u, \\ P(t^+) = (1 - \theta_3)P(t) + v. \end{cases} \quad (۳)$$

به وضوح می توان دید که در مدل (۲) و (۳)،  $I(t)$  بر  $P(t)$  تأثیر نمی گذارد. پس بنابراین برای هر  $t \in (nT, (n+1)T]$ ، راه حل های معادله (۲) می تواند به طور مستقل حل شود

$$I(t) = (1 - \theta_2)^n \left( I^*(0^+) - \frac{u}{1 - (1 - \theta_2)\exp(-\mu t)} \right) \exp(-\mu t) + I^*(t). \quad (۴)$$

$$P(t) = (1 - \theta_3)^n \left( P^*(0^+) - \frac{v}{1 - (1 - \theta_3)\exp(-\gamma t)} \right) \exp(-\gamma t) + P^*(t), \quad (۵)$$

که در آن،  $I^*(t)$  و  $P^*(t)$  جواب های دوره ای مثبت (۲) هستند

$$I^*(t) = \frac{u \exp(-\mu(t - nT))}{1 - (1 - \theta_2)\exp(-\mu T)} \text{ با } I^*(0^+) = \frac{u}{1 - (1 - \theta_2)\exp(-\mu T)}, \quad (۶)$$

$$P^*(t) = \frac{v \exp(-\gamma(t - nT))}{1 - (1 - \theta_3)\exp(-\gamma T)} \text{ با } P^*(0^+) = \frac{v}{1 - (1 - \theta_3)\exp(-\gamma T)}, \quad (۷)$$

وقتی که  $S(t) \equiv 0$  معادله آخر سیستم (۹) به صورت زیر است.

$$\dot{X} = bX \left( 1 - \frac{X}{L} \right), \quad x(0) = x_0, \quad (۸)$$

این معادله معروف لجستیک است و جواب آن به صورت زیر است

$$X = \frac{Lx_0}{x_0 + (L - x_0)\exp(-bt)}, \quad (۹)$$

به وضوح می بینیم که سیستم (۸) دارای دو تعادل  $X \equiv 0$  و  $X \equiv L$  می باشد. از این رو سیستم (۹) دو جواب دوره ای ناپدید کردن آفات مستعد  $(0, I^*(t), P^*(t), L)$  و  $(0, I^*(t), P^*(t), 0)$  دارد. از آنجایی که  $X \equiv 0$  برای سیستم (۸) ناپایدار است. جواب  $(0, I^*(t), P^*(t), 0)$  نیز برای سیستم (۹) ناپایدار است. علاوه بر این از منظر اکولوژی نامطلوب است. با این حال  $(0, I^*(t), P^*(t), L)$  یک وضعیت مطلوب است که گیاه را محافظت می کند. اکنون ما برای پایداری موضعی آن شرایط کافی را فراهم می کنیم.

**قضیه ۱.۰.** جواب دوره ای ناپدید کردن آفات مستعد،  $(0, I^*(t), P^*(t), L)$  به طور موضعی پایدار مجانبی است اگر شرط زیر برقرار باشد.

$$\Re = (1 - \theta_1) \exp \left( \int_0^T \left( r - \frac{rI^*}{K} - \lambda I^* - \alpha_2 P^* + \frac{\beta_1 L}{1 + \alpha_1 L} \right) dt \right) < 1 \quad (۱۰)$$

و ناپایدار است اگر نابرابری بالا برقرار نباشد. از زاویه اپیدمیولوژی، می توان  $\Re$  سمت چپ (۱۰) را تعداد اصلی تولید مثل در نظر گرفت.

□

اثبات. اثبات این قضیه مشابه قضیه ۱.۳ در منبع [۴] است.

**قضیه ۲.۰.** فرض کنید که

$$\eta = (1 - \theta_1) \exp \left( \int_0^T \left( r - \frac{rI^*}{K} - \lambda I^* - \alpha_2 P^* + \beta_1 L \right) dt \right) < 1. \quad (۱۱)$$

آنگاه جواب ناپدید کردن آفات مستعد  $(0, I^*(t), P^*(t), L)$  بطور سراسری پایدار مجانبی است

اثبات. اثبات قضیه فوق مشابه اثبات قضیه ۲.۳ در منبع [۴] می باشد. □

سرانجام، ما ابتدا در مورد تأثیر گیاه در پایداری جواب دوره ای نابود کردن آفات مستعد بحث می کنیم. در منبع (۴۱) یک سیستم شکار-شکارچی ارائه شده است، که شامل آفت مستعد و عفونی و دشمن طبیعی می باشد. پایداری موضعی جواب دوره ای در منبع مورد نظر به صورت زیر ارائه شده است:

$$\Delta_1 = rT - \frac{u(r + \lambda K)(1 - \exp(-\mu T))}{\mu K[1 - (1 - \theta_2)\exp(-\mu T)]} - \frac{\alpha v(1 - \exp(-\gamma T))}{1 - (1 - \theta_3)\exp(-\gamma T)} < \ln\left(\frac{1}{1 - \theta_1}\right) \quad (۱۲)$$

با این حال، شرط پایداری موضعی (۱۰) در اینجا معادل است

$$rT - \frac{u(r + \lambda K)(1 - \exp(-\mu T))}{\mu K[1 - (1 - \theta_2)\exp(-\mu T)]} - \frac{\alpha_2 v(1 - \exp(-\gamma T))}{1 - (1 - \theta_3)\exp(-\gamma T)} + \frac{1 + a_1 L}{\beta_1 L} \left( \exp\left(\frac{\beta_1 L}{1 + a_1 L} - 1\right) \right) < \ln\left(\frac{1}{1 - \theta_1}\right) \quad (۱۳)$$

از (۱۲) و (۱۳) معادله زیر نتیجه می شود

$$\Delta_1 + \frac{1 + a_1 L}{\beta_1 L} \left( \exp\left(\frac{\beta_1 L}{1 + a_1 L} - 1\right) \right) < \ln\left(\frac{1}{1 - \theta_1}\right). \quad (۱۴)$$

به وضوح دیده می شود که شرایط کافی برای پایداری موضعی و سراسری در (۱۳) مشابه شرایط موجود در سیستم شکار-شکارچی در منبع (۴۱) است. اما به دلیل ورود متغیر جدید  $X(t)$  به سیستم دینامیکی، برای تحقق پایداری باید کنترل های مختلفی تقویت شوند. یعنی با وارد کردن گیاهان، سایر پارامترهای کنترل باید تنظیم شود تا پایداری موضعی برقرار شود. در دو مورد زیر جزئیات بیشتری شرح داده شده است:

۱. برای پارامترهای کنترل بیولوژیکی معین  $u$  و  $v$ ، ما باید کسر کشت  $\theta_1$  را افزایش دهیم و در عین حال کسر کشت  $\theta_2$  و  $\theta_3$  را کاهش دهیم تا پایداری موضعی جواب دوره ای نابود کردن آفات مستعد را تضمین کنیم. افزایش  $\theta_1$  به معنای استفاده از دوزهای بالای حشره کش است. اما به دلیل حساس بودن دشمنان طبیعی نسبت به آفات، این امر در یک زمینه سنتی کنترل آفات مطلوب نیست. استفاده از سموم دفع آفات و همچنین در مقیاس بزرگ بهترین گزینه از نظر زیست محیطی نیست. بنابراین متخصصان این کار به جای آنکه طیف گسترده ای از سموم داشته باشند، باید حشره کش های هدفمند را انتخاب کنند.

۲. برای پارامترهای کنترل شیمیایی معین  $\theta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) باید مقدار آزاد شده آفات عفونی  $u$  و شکارچی  $v$  را افزایش دهیم تا پایداری موضعی جواب دوره ای نابود کردن آفات مستعد را تضمین کنیم. این بدون شک هزینه کنترل آفات را بالا می برد.

تجزیه و تحلیل بالا نشان می دهد که حضور تولید کننده پایه(منبع گیاهی  $X(t)$ ) تأثیر ناپایدارکننده دارد به این معنا که جواب ها به جای نزدیک شدن به جواب دوره ای نابود کردن آفات مستعد در غیاب آن، اثرات ناپایدارکننده ای را نشان می دهند. این تعدیل ها نشان می دهد که مطالعه مدل زیست محیطی سه گونه اکتشافی، موضوعی مهم و کاربردی است، زیرا اولاً انعطاف پذیری مدل اپیدمی (همه گیر) کنترل آفات را سخت تر می کند. ثانیاً، ما اثر عفونت پاتوژن و شکار را در کنترل تکانشی آفت در نظر می گیریم. اگر مدل (۴۴) عاری از آفات عفونی باشد، وضعیت پایداری موضعی (۱۰) به صورت زیر اصلاح می شود:

$$rT - \frac{\alpha_2 v(1 - \exp(-\gamma T))}{1 - (1 - \theta_3)\exp(-\gamma T)} + \frac{1 + a_1 L}{\beta_1 L} \left( \exp\left(\frac{\beta_1 L}{1 + a_1 L} - 1\right) \right) < \ln\left(\frac{1}{1 - \theta_1}\right) \quad (۱۵)$$

اگر مدل (۴۴) عاری از شکارچی آزادشده باشد، (۱۰) به صورت زیر ساده می شود.

$$rT - \frac{u(r + \lambda K)(1 - \exp(-\mu T))}{\mu K[1 - (1 - \theta_2)\exp(-\mu T)]} + \frac{1 + a_1 L}{\beta_1 L} \left( \exp\left(\frac{\beta_1 L}{1 + a_1 L} - 1\right) \right) < \ln\left(\frac{1}{1 - \theta_1}\right) \quad (۱۶)$$

از (۱۵) و (۱۶)، می توان دریافت که عفونت پاتوژن و طعمه هر دو مقدار آستانه سمت چپ را کاهش داده و در نتیجه، تعداد اصلی تولید مثل را کاهش می دهند. اما میزان مرگ و میر  $\mu$  بزرگتر از آفات عفونی برای کنترل آفات نامطلوب است زیرا سطح منبع بیماریزا را پایین می آورد. از سوی دیگر، ما می توانیم تکامل ترکیب معادلات دیفرانسیل و معادلات تکانشی در (۴۴) بدست آوریم

$$\dot{I} = (\lambda(\mu_1)S - \mu_0 - \mu_1)I,$$

که در اینجا به ترتیب  $\mu_0$  و  $\mu_1$  زمینه و مرگ و میر ناشی از بیماری آفات آلوده است. تعداد زیادی از تحقیقات نظری نشان داده اند که بین نرخ انتقال بیماری پاتوژن  $\lambda$  و میزان ابتلا آن  $\mu_1$  رابطه متقابل وجود دارد. این رابطه بصورت  $\lambda = \lambda(\mu_1)$  است. در اینجا  $\lambda(\mu_1)S - \mu_0 - \mu_1$  تناسب هجوم جهش یافته است. یک تهاجم موفق در صورتی امکان پذیر است که  $\lambda(\mu_1)S - \mu_0 - \mu_1 > 0$  باشد. بنابراین مرگ و میر بیشتر آفت آلوده منجر به حمله ناامید کننده خواهد شد. [۷]

## استراتژی های کنترل بهینه

پایداری جواب دوره ای نابود کردن آفات مستعد به این معنی است که گیاه می تواند تحت کنترل های تکانه ای به ظرفیت حمل خود برسد. با این حال، ما هزینه کنترل های مختلف را در نظر نگرفته ایم که در عمل یک مسئله مهم است. از این رو، ما این بخش را به حداکثر رساندن بازده اقتصادی گیاهان در زمان نهایی با حداقل هزینه کنترل اختصاص می دهیم. برای تحقق هدف از دو تاکتیک متداول، کنترل شیمیایی و کنترل بیولوژی استفاده شده است. یعنی تعداد آفت ها با استفاده از بخش های مربوط به کشته های  $\theta_i$  که به نسبت مستقیم با میزان سموم دفع آفات مرتبط هستند یا مقادیر  $u$  و  $v$  منتشر می شود که با هزینه زراعت بیولوژیکی مطابقت دارد کنترل می شود. این دو کنترل تکانشی در نقاط زمانی ثابت  $nT$  اجرا می شوند. علاوه بر این، ما همچنین اجرای کنترل های تکانشی را در نقاط زمانی متغیر دوره ای  $T_i$  در نظر می گیریم. این مسائل را می توان به عنوان مسائل انتخاب پارامتر بهینه مورد بحث و بررسی قرار داد. حل آنها آسان نیست، به خصوص مورد کنترل در نقاط زمانی متغیر دوره ای. این مسئله را می توان به عنوان یافتن پارامترهای کنترل بهینه  $u, v$ ، و  $\theta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) بیان کرد تا تابع هدف را به حداقل برساند.

$$J(\theta_i, u, v, T) = -CX^N(1) + \phi_1(T, u, v, \theta_1, \theta_2, \theta_3), \quad (۱۷)$$

بطوری که  $C > 0$  سود برای هر واحد  $X$  است و  $\phi_1$  نشان دهنده هزینه کنترل های مختلف است. این یک مسئله گزینش پارامتر بهینه است. نکته اصلی یافتن گرادیان یا توجه به کنترل های مختلف است به گونه ای که می توان از هر روش بهینه سازی مبتنی بر گرادیان برای یافتن کنترل های بهینه استفاده کرد. در این قسمت روش پیشنهادی در فصل قبل انجام شده است. برای یافتن گرادیان ها، ابتدا از یک روش تغییر متغیر نسبت به متغیر زمانی  $t$  برای تبدیل (۴۴) به مجموعه گسترده ای از معادلات دیفرانسیل معادل استفاده می شود. برای  $s \in [0, 1]$  تعریف می کنیم

$$S^i(s) = S((i-1)T + sT), \quad I^i(s) = I((i-1)T + sT), \\ P^i(s) = P((i-1)T + sT), \quad X^i(s) = X((i-1)T + sT).$$

سپس برای  $i = 1, 2, \dots, N$  به زیر سیستم تبدیل می شود

$$\begin{cases} \dot{S}^i = T f_1^i = T(rS^i(1 - \frac{S^i + I^i}{K}) - \lambda I^i S^i - \frac{\alpha_2 S^i P^i}{1 + \alpha_2 S^i} + \frac{\beta_1 S^i X^i}{1 + \alpha_1 X^i}) \\ \dot{I}^i = T f_2^i = T(\lambda I^i S^i - \mu I^i) \\ \dot{P}^i = T f_3^i = T(\frac{\beta_2 S^i P^i}{1 + \alpha_2 S^i} - \gamma P^i) \\ \dot{X}^i = T f_4^i = T(bX^i(1 - \frac{X^i}{L}) - \frac{\alpha_1 S^i X^i}{1 + \alpha_1 X^i}) \end{cases} \quad (۱۸)$$

و کنترل تکانه مربوطه به شرایط مرزی تبدیل می شود،

$$\begin{cases} S^i(0) = (1 - \theta_1)S^{i-1}(1); \\ I^i(0) = (1 - \theta_2)I^{i-1}(1) + u; \\ P^i(0) = (1 - \theta_3)P^{i-1}(1) + v; \\ X^i(0) = X^{i-1}(1); \end{cases} \quad (19)$$

به منظور توصیف گرادیان، معادلات کمک حالت<sup>۱</sup> (ضرایب لاگرانژ) را تعریف می کنیم برای این منظور داریم

$$\begin{aligned} J(\theta_i, u, v, T) &= -CX^N(1) + \phi_1(T, u, v, \theta_1, \theta_2, \theta_3), \\ i &= 1, 2, 3 \\ s.t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(Y) &= \begin{cases} Tf_1^i = T(rS^i(1 - \frac{S^i+I^i}{K}) - \lambda I^i S^i - \frac{\alpha_2 S^i P^i}{1+\alpha_2 S^i} + \frac{\beta_1 S^i X^i}{1+\alpha_1 X^i}) \\ Tf_2^i = T(\lambda I^i S^i - \mu I^i) \\ Tf_3^i = T(\frac{\beta_2 S^i P^i}{1+\alpha_2 S^i} - \gamma P^i) \\ Tf_4^i = T(bX^i(1 - \frac{X^i}{L}) - \frac{\alpha_1 S^i X^i}{1+\alpha_1 X^i}) \end{cases} \\ \dot{Y} &= F(Y) = \\ \begin{cases} \dot{S}^i = Tf_1^i = T(rS^i(1 - \frac{S^i+I^i}{K}) - \lambda I^i S^i - \frac{\alpha_2 S^i P^i}{1+\alpha_2 S^i} + \frac{\beta_1 S^i X^i}{1+\alpha_1 X^i}) \\ \dot{I}^i = Tf_2^i = T(\lambda I^i S^i - \mu I^i) \\ \dot{P}^i = Tf_3^i = T(\frac{\beta_2 S^i P^i}{1+\alpha_2 S^i} - \gamma P^i) \\ \dot{X}^i = Tf_4^i = T(bX^i(1 - \frac{X^i}{L}) - \frac{\alpha_1 S^i X^i}{1+\alpha_1 X^i}) \end{cases} \end{aligned} \quad (20)$$

با شرایط مرزی

$$\begin{cases} S^i(0) = (1 - \theta_1)S^{i-1}(1); \\ I^i(0) = (1 - \theta_2)I^{i-1}(1) + u; \\ P^i(0) = (1 - \theta_3)P^{i-1}(1) + v; \\ X^i(0) = X^{i-1}(1); \end{cases} \quad (21)$$

که در اینجا بردار  $Y = (S, I, P, X)$  همان بردار حالت<sup>۲</sup> است. اگر تابع همیلتونین را تعریف کنیم معادله دیفرانسیلی  $\frac{\partial H}{\partial Y} = \dot{\lambda}^i(t)$  به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1^i = -T[\lambda_1^i(r - \frac{2r(S^i+I^i)}{K}) - \lambda I^i - \frac{\alpha_2 P^i}{(1+\alpha_2 S^i)^2} + \frac{\beta_1 X^i}{1+\alpha_1 X^i}) \\ \quad + \lambda_2^i \lambda I^i + \lambda_3^i \frac{\beta_2 P^i}{(1+\alpha_2 S^i)^2} - \lambda_4^i \frac{\alpha_1 X^i}{1+\alpha_1 X^i}] \\ \dot{\lambda}_2^i = -T[\lambda_1^i(-\frac{rS^i}{K} - \lambda S^i) + \lambda_2^i(\lambda S^i - \mu)] \\ \dot{\lambda}_3^i = -T[-\lambda_1^i \frac{\alpha_2 S^i}{1+\alpha_2 S^i} + \lambda_3^i(\frac{\beta_2 S^i}{1+\alpha_2 S^i} - \gamma)] \\ \dot{\lambda}_4^i = -T[(\lambda_1^i \frac{\beta_1 S^i}{(1+\alpha_1 X^i)^2}) + \lambda_4^i(b - \frac{2bX^i}{L} - \frac{\alpha_1 S^i}{(1+\alpha_1 X^i)^2})] \end{cases} \quad (22)$$

<sup>1</sup>Costate

<sup>2</sup>State

واضع است که برای هر  $i$  برای دوره معین  $T_i$  یک بردار  $(\lambda_1^i, \lambda_2^i, \lambda_2^i, \lambda_2^i)$  به عنوان ضرایب لاگرانژ در نظر گرفته می شود.

در طول این بخش از پارامترهایی که در جدول زیر آمده استفاده می شود:

مقادیر	پارامتر	مقادیر	پارامتر
0.8	$r$	0.6	$\lambda$
0.35	$\mu$	0.5	$a_1$
0.35	$\gamma$	0.5	$a_2$
3	$K$	0.5	$b$
2.8	$L$	0.5	$\alpha_1$
0.3	$\beta_1$	0.35	$\alpha_2$
0.25	$\beta_2$	10	$C$

جدول ۱: پارامترهای داده شده برای سیستم

با وجود پارامترهای موجود در جدول بالا و برخی پارامترهای کنترل، حالت های  $I(t)$  و  $S(t)$ ، تعداد آفت، به صفر نمی رسند. و حالت  $X(t)$ ، تولید کننده پایه، به بازده حداکثری خود نمی رسد. ما امیدواریم که برای به حداکثر رساندن بازده  $X(t)$  با کمترین هزینه، پارامترهای کنترل بهینه را پیدا کنیم.

### بهینه سازی با کنترل بیولوژیکی با دوره (تناوب) زمانی معین

در این بخش سعی شده، مقدار حداکثری  $X(t)$  با استفاده از کنترل های بیولوژیکی بدست آید. یعنی بهینه سازی با انتخاب پارامترهای بهینه  $u$  و  $v$  محقق می شود. تابع هدف مربوطه به صورت زیر تعریف شده است:

$$J(u, v) = -CX^N(1) + \frac{1}{2}N(u^2 + v^2). \quad (23)$$

مطابق قضیه (۴۴)، گرادیان  $J(u, v)$  نسبت به  $u$  و  $v$  به صورت زیر است:

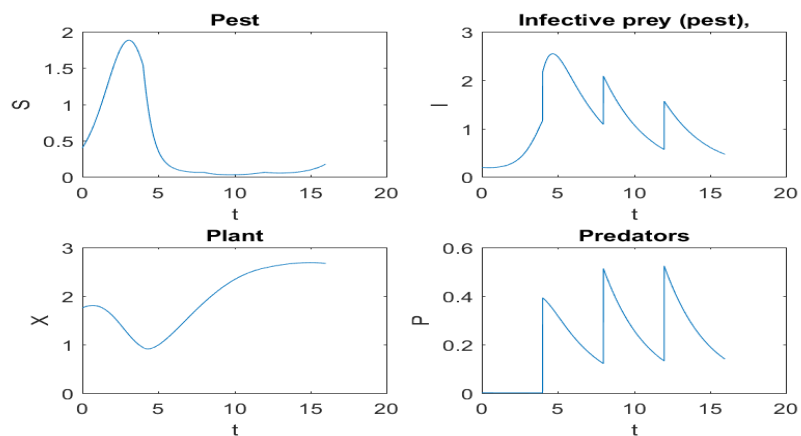
$$\nabla_u J = Nu + \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_2^{i+1}(0), \quad \nabla_v J = Nv + \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_3^{i+1}(0), \quad (24)$$

کسری از  $S(t)$ ،  $I(t)$  و  $P(t)$  کشته شده در اثر پاشش سموم دفع آفات به عنوان  $\theta_i = 0, i = 1, 2, 3$  تعیین می شود. حد بالایی و پایینی کنترل ها به ترتیب ۰ و ۱ است. ما با استفاده از تابع  $FMINCON$  در جعبه ابزار بهینه سازی  $Matlab$  مسائل بهینه سازی در این بخش را حل می کنیم. دو نتیجه از این بخش به شرح زیر است:

۱. هنگامی که  $N = 4, T = 4$ ، هنگامی که چهار دوره برابر با دوره تناوب چهار کنترل تکانه ای انجام می شود. (مقادیر بهینه در جدول زیر نمایش داده شده است:

جدول ۲: مقادیر بهینه بدست آمده برای چهار دوره با تناوب چهار در جدول زیر می باشد

$X^N(1)$	2.6655	$J$	-24.3485
$v^*$	0.3913	$u^*$	1
$cost\ of\ control$		2.3063	

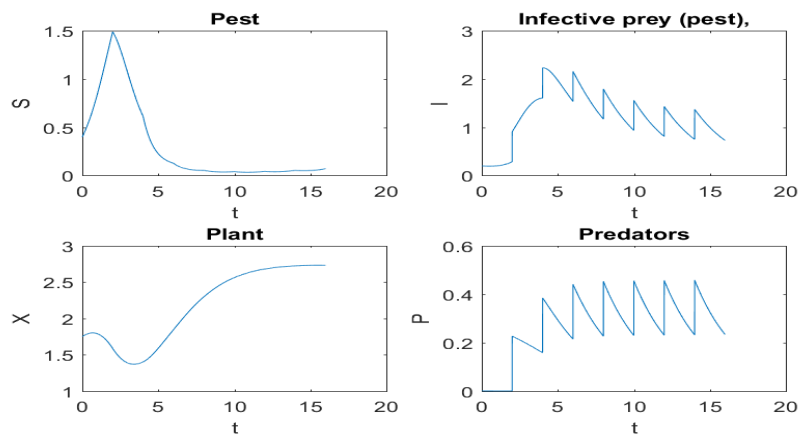


شکل ۱: در اینجا نمودار حالت ها برای چهار دوره با تناوب چهار رسم شده است.

۲. هنگامی که  $N = 8, T = 2$ ، (هنگامی که هشت (۸) دوره با فاصله یا تناوب زمانی دو (۲) کنترل تکانه ای انجام می شود)، مقادیر بهینه به صورت زیر می باشند.

جدول ۳: مقادیر بهینه بدست آمده برای هشت دوره با تناوب دو در جدول زیر می باشد

$X^N(1)$	2.7278		$J$	-25.5215
$v^*$	0.2260		$u^*$	0.6228
<i>cost of control</i>		1.7561		



شکل ۲: در اینجا نمودار حالت ها برای هشت دوره با تناوب دو رسم شده است.



### بهینه سازی توسط کنترل شیمیایی با دوره زمانی معین

در این این قسمت سعی می شود که مقدار بازده حداکثری  $X(t)$  با استفاده از کنترل شیمیایی بدست آید. یعنی بهینه سازی با انتخاب پارامترهای بهینه  $\theta_i = 0, i = 1, 2, 3$  حاصل می شود. از این رو، تابع هدف مربوطه به صورت زیر تعریف شده است.

$$J(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = -CX^N(1) + \frac{1}{2}N(\theta_1^2, \theta_2^2, \theta_3^2). \quad (25)$$

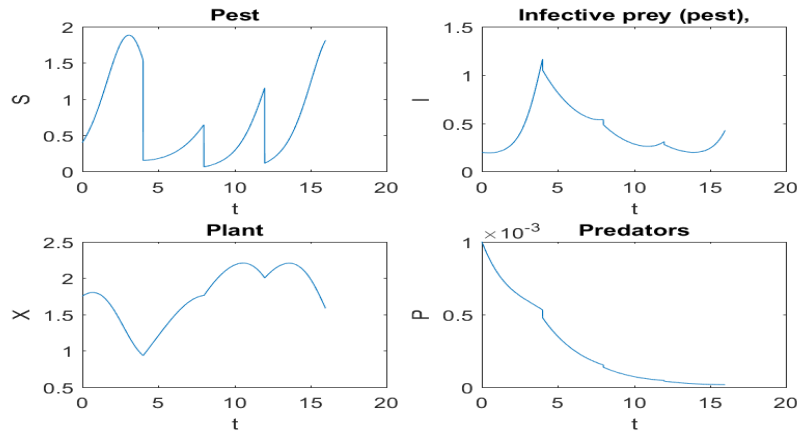
مطابق قضیه (۴۴)، گرادیان  $J(u, v)$  نسبت به  $\theta_i = 0, i = 1, 2, 3$  به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \nabla_{\theta_1} J &= N\theta_1 + \sum_{i=1}^{N-1} (-\lambda_1^{i+1}(0)S^i(1)), & \nabla_{\theta_2} J &= N\theta_2 + \sum_{i=1}^{N-1} (-\lambda_2^{i+1}(0)I^i(1)), \\ \nabla_{\theta_3} J &= N\theta_3 + \sum_{i=1}^{N-1} (-\lambda_3^{i+1}(0)P^i(1)), \end{aligned} \quad (26)$$

مقدار رها شده آفات عفونی و شکارچیان به صورت  $u = v = 0$  تعیین می شوند. کران های بالا و پایین کلیه کنترلها به ترتیب 0.1 و 0.9 است. دو نتیجه عددی برای این قسمت به شرح زیر بدست آمده است:

جدول ۴: مقادیر بهینه بدست آمده برای چهار دوره با تناوب چهار در جدول زیر می باشد

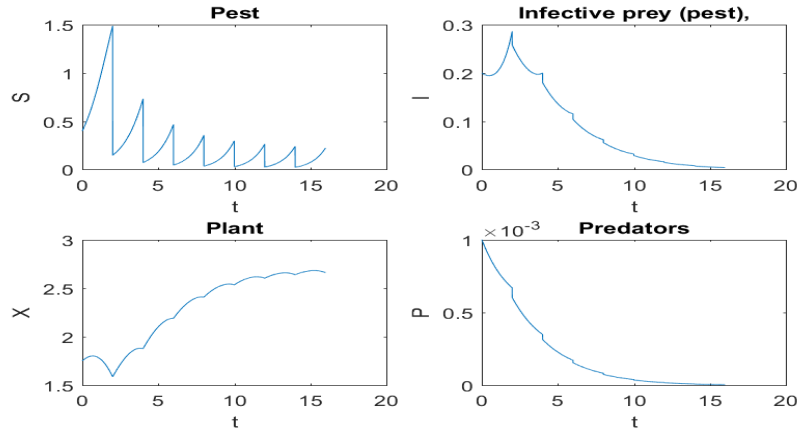
$J$	-14.1686	$X^N(1)$	1.5829
$\theta_1^*$	0.9	$\theta_2^*$	0.1
$\theta_3^*$	0.1	cost of control	1.66



شکل ۳: در اینجا نمودار حالت ها برای چهار دوره با تناوب چهار رسم شده است.

جدول ۵: مقادیر بهینه بدست آمده برای هشت دوره با تناوب دو در جدول زیر می باشد

$J$	-23.2797	$X^N(1)$	2.66
$\theta_1^*$	0.9	$\theta_2^*$	0.1
$\theta_3^*$	0.1	$cost\ of\ control$	3.32



شکل ۴: در اینجا نمودار حالت ها برای هشت دوره با تناوب دو رسم شده است.

### بهینه سازی با کنترل تلفیقی با دوره زمانی معین

در این بخش هم از کنترل های بیولوژیکی و هم از کنترل های شیمیایی در بهینه سازی استفاده می شود. تابع هدف مربوطه به صورت زیر تعریف شده است:

$$J(u, v, \theta_1, \theta_2, \theta_3) = -CX^N(1) + \frac{1}{2}N(\theta_1^2, \theta_2^2, \theta_3^2 + u^2 + v^2). \quad (27)$$

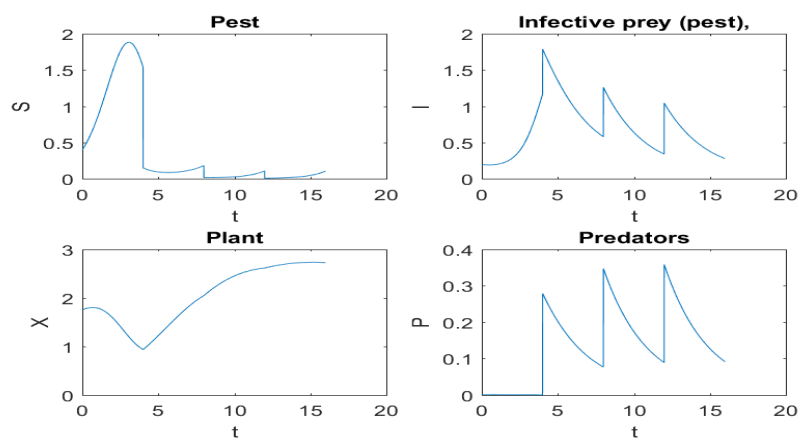
مطابق قضیه (۴۴)، گرادیان  $J(u, v)$  نسبت به  $\theta_i = 0, i = 1, 2, 3$  و  $u$  و  $v$  به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \nabla_u J &= Nu + \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_2^{i+1}(0), & \nabla_v J &= Nv + \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_3^{i+1}(0), \\ \nabla_{\theta_1} J &= N\theta_1 + \sum_{i=1}^{N-1} (-\lambda_1^{i+1}(0)S^i(1)), & \nabla_{\theta_2} J &= N\theta_2 + \sum_{i=1}^{N-1} (-\lambda_2^{i+1}(0)I^i(1)), \\ \nabla_{\theta_3} J &= N\theta_3 + \sum_{i=1}^{N-1} (-\lambda_3^{i+1}(0)P^i(1)), \end{aligned} \quad (28)$$

همانند بخش های قبل کران های پایین و بالا برای مقادیر کنترلی  $\theta_i$  ها برابر 0.1 و 0.9 و برای مقادیر کنترلی  $u$  و  $v$  برابر 0 و 1 می باشد. دو نتیجه به شرح زیر است:

جدول ۶: مقادیر بهینه بدست آمده برای چهار دوره با تناوب چهار در جدول زیر می باشد

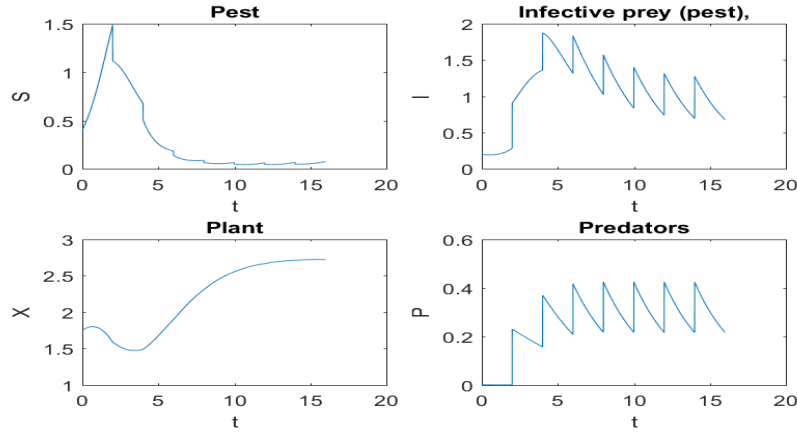
$J$	-24.3184	$X^N(1)$	2.7224
$\theta_1^*$	0.9	$\theta_2^*$	0.1
$\theta_3^*$	0.1	$u^*$	0.7386
$v^*$	0.2780	<i>cost of control</i>	1.66



شکل ۵: در اینجا نمودار حالت ها برای چهار دوره با تناوب چهار رسم شده است.

جدول ۷: مقادیر بهینه بدست آمده برای هشت دوره با تناوب دو در جدول زیر می باشد

$J$	-24.9810	$X^N(1)$	2.7211
$\theta_1^*$	0.25	$\theta_2^*$	0.1
$\theta_3^*$	0.1	$u^*$	0.65
$v^*$	0.2291	<i>cost of control</i>	1.66



شکل ۶: در اینجا نمودار حالت ها برای هشت دوره با تناوب دو رسم شده است.

### بهینه سازی با دوره زمانی متغیر

بازه های زمانی  $T_i = \tau_i - \tau_{i-1}, i = 1, 2, 3, \dots, N$  را تعریف می کنیم بطوری که در اینجا  $\tau_i > 0$  زمانی است که کنترل های تکانه ای در آن انجام می شوند. زمان اولیه و زمان نهایی به ترتیب  $\tau_0 = 0$  و  $\tau_N = T_e$  است که در این زمان ها اولین و آخرین کنترل تکانه ای انجام می شود. در بخش های قبل دوره تکانه ثابت شده است، یعنی  $T_i$  یک ثابت است. در این بخش، دوره های تکانه ای متغیر را در نظر می گیریم، یعنی ممکن است  $T_i$  برای هر  $i$  متفاوت باشد. بطور شهودی اگر نقاط زمان تکانه به عنوان متغیرهای تصمیم انتخاب شوند، باید جواب بهتری حاصل شود. از این رو، مسئله بهینه می تواند به صورت زیر تنظیم شود

$$\min J(T_1, T_2, T_3, \dots, T_N) = -CX^N(1) + \frac{1}{2}N(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 + u^2 + v^2), \quad (29)$$

بطوری که

$$\sum_{i=1}^N T_i = T_e \quad \text{and} \quad T_i \geq 1 \quad (30)$$

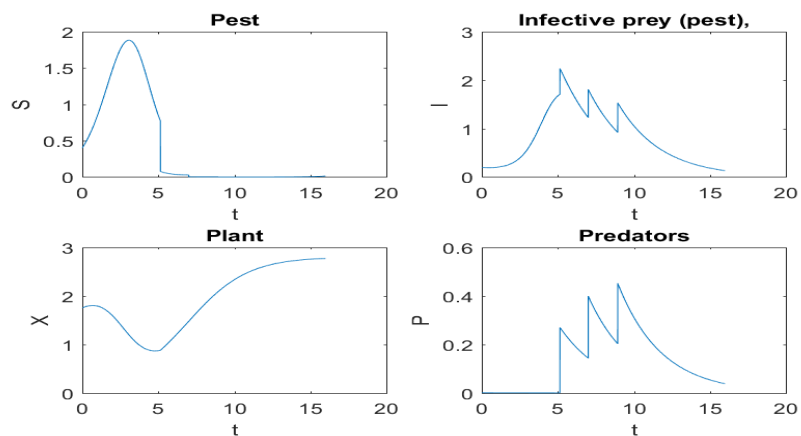
از آنجایی که  $u, v$  و  $\theta_i$  ثابت هستند که با نتایج بدست آمده در بخش ۲.۰ یکسان است. برای این مسئله، معادلات حالت مربوطه (۲۵) و معادلات هزینه ای (۲۷) نیز تغییر کرده اند. در این معادلات متفاوت، ضرایب  $T_i$  به عنوان جایگزین می شود. به طور مشابه گرادینان ها نسبت به  $T_i$  هستند

$$\nabla_{T_i} J = \sum_{j=1}^4 \int_0^1 \lambda_j^i(t) f_j^i(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (31)$$

دو نتیجه به شرح زیر ذکر شده است:

جدول ۸: مقادیر بهینه بدست آمده برای دو دوره با تناوب متغیر در جدول زیر می باشد

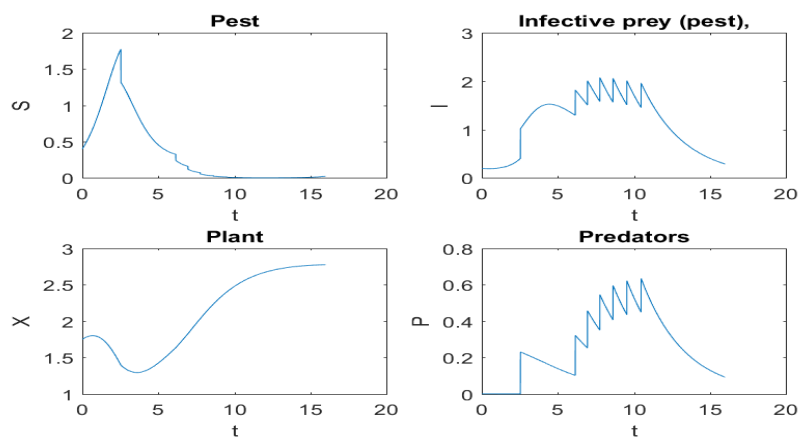
$J$	-24.8686		$X^N(1)$	2.7670
$\tau^* = [0$	5.1420	7.0018	8.9406	16]



شکل ۷: در اینجا نمودار حالت ها برای چهار دوره با تناوب متغیر رسم شده است.

جدول ۹: مقادیر بهینه بدست آمده برای هشت دوره با تناوب متغیر در جدول زیر می باشد

$J$	-24.4536	$X^N(1)$	2.7713
$\tau^* = [0 \quad 2.5408 \quad 6.1504 \quad 6.9506 \quad 7.7629 \quad 8.6307 \quad 9.5419 \quad 10.4804 \quad 16]$			



شکل ۸: در اینجا نمودار حالت ها برای هشت دوره با تناوب متغیر رسم شده است.

## نتیجه گیری

در این پژوهش یک منبع گیاهی به سیستم شکار-شکارچی وارد می شود و سیستم جدیدی مدل سازی می شود تحت عنوان گیاه-آفت-آفتکش (یا به عبارت دیگر می توان گفت گیاه-طعمه-شکارچی) که در اینجا هدف ما مقابله با آفت و به حداکثر رساندن گیاه در زمان نهایی با کمترین تلاش می باشد. سیستم شکار-شکارچی به صورت زیر می باشد:

$$\begin{cases} \dot{S} = rS(1 - \frac{S+I}{K}) - \lambda IS - \frac{\alpha_2 SP}{1+\alpha_2 S} \\ \dot{I} = \lambda IS - \mu I \\ \dot{P} = \frac{\beta_2 SP}{1+\alpha_2 S} - \gamma P \end{cases}, t \neq nT$$

و کنترل تکانه ای به صورت زیر فرمولبندی شده است:

$$\begin{cases} \Delta S(t) = -\theta_1 S(t), \\ \Delta I(t) = -\theta_2 I(t) + u, \\ \Delta P(t) = -\theta_3 P(t) + v, \end{cases}, t = nT$$

که با ورود جمعیت گیاهی  $X(t)$  سیستم مورد نظر به صورت زیر مدل سازی می شود:

$$\begin{cases} \dot{S} = rS(1 - \frac{S+I}{K}) - \lambda IS - \frac{\alpha_2 SP}{1+\alpha_2 S} + \frac{\beta_1 SX}{1+\alpha_1 X} \\ \dot{I} = \lambda IS - \mu I \\ \dot{P} = \frac{\beta_2 SP}{1+\alpha_2 S} - \gamma P \\ \dot{X} = bX(1 - \frac{X}{L}) - \frac{\alpha_1 SX}{1+\alpha_1 X} \end{cases}, t \neq nT$$

و کنترل تکانه ای به صورت زیر فرمولبندی شده است:

$$\begin{cases} \Delta S(t) = -\theta_1 S(t), \\ \Delta I(t) = -\theta_2 I(t) + u, \\ \Delta P(t) = -\theta_3 P(t) + v, \\ \Delta X(t) = 0, \end{cases}, t = nT$$

ما در اینجا برای ریشه کن کردن آفات مستعد و همچنین به حداکثر رساندن منبع گیاهی موجود چهار استراتژی کنترل بهینه را به کار گرفتیم که شامل کنترل بیولوژیکی، کنترل شیمیایی، کنترل تلفیقی با نقاط زمانی تکانه ای ثابت و متغیر می باشد. بر اساس نتایج عددی بدست آمده از این چهار استراتژی پیشنهاداتی را برای کنترل آفت به صورت زیر ارائه می کنیم:

۱. کنترل بیولوژیکی از کنترل شیمیایی موثرتر است.
۲. انتشار جمعیت آفات آلوده بیشتر می تواند عملکرد را بیشتر از رهاسازی شکارچی بهبود بخشد.
۳. بخش کشتار آفت مستعد از پارامترهای دیگر مهمتر است.
۴. کنترل تکانه ای باید در اوایل افق زمانی بیشتر اجرا شود.

## مراجع

- [1] AOARWAL, R. P., and GUPTA, R. C., *Essentials of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, Singapore, 1993.
- [2] Y.Liu, K.L.Teo, L.S.Jennings, S.Wang, On a class of optimal control problems with state jumps. *J.Optim Theory Appl.* 98(1998) 65–82.
- [3] JENNINGS, L.S., FISHER, M.E., TEO, K.L., and GOH, C.J., *MISER 3 Solving Optimal Control Problems: An Update*, *Advances in Engineering Software and*
- [4] P.Yongzhen, J.Xuehui, L.Changguo, Pest regulation by means of continuous and impulsive nonlinear controls, *Math. Comput. Modell.* 51(2010) 810–822.
- [5] M.Su, C.Hui, The effect of predation on the prevalence and aggregation of pathogens in prey, *BioSystems.* 105 (2011) 300–306.
- [6] D.Bainov, P.Simeonov, *Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications*, Longman and John Wiley, New York, 1993.
- [7] A.Morozov, M.W.Adamson, Evolution of virulence driven by predator-prey interaction: Possible consequences for population dynamics, *J.Theor.Biol.* 276(2011) 181–191.
- [8] V.M. Stern , Economic thresholds, *Ann. Rev. Entomol.* (1973) 259–280 .
- [9] J.C.V.Lenteren, *Integrated pest management in protected crops*, in: D.Dent (Ed.), *Integrated Pest Management*, Chapman and Hall, London, 1995, pp. 311–320.
- [10] M.L.Flint, *Integrated Pest Management for Walnuts*, second, University of California Statewide Integrated Pest Management Project, Division of Agriculture and Natural Resources, University of California, Oakland, CA, publication 3270, 1987, p. 3641.
- [11] P.Kareiva, *Experimental and mathematical analyses of herbivore movement: quantifying the influence of plant spacing and quality on foraging discrimination*, *Ecol.Monogr.* 52(1982) 261.
- [12] S.Y.Tang, L.S.Chen, *Modelling and analysis of integrated pest management strategy*, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B.* 4(2004) 759–768.