**بررسي یک مدل وتحلیل پایداری نقاط تعادل آن**

**نرگس شایق کارگر\*[[1]](#footnote-1)،** پروفسور عقیله حیدری **[[2]](#footnote-2)**

1- دبیر رسمی آموزش و پرورش و مدرس آموزشکده فنیدختران سبزوارn.shayegh@yahoo.com

2- پروفسور عقیله حیدری، عضو هیات علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور مشهد aghile\_heidari@pnu.ac.ir

 **چکیده:**

در این مقاله، ما یک مدل اپیدمی SIS تشریح مي‌*کنیم* که در آن هر دو : میزان انتقال بیماری و تابع درمانی به فرم های اشباع در نظر گرفته می شوند. این مدل یک نقطه تعادل فارغ از بیماری ، و دو نقطه تعادل آندمیک دارد. با محاسبه عدد تکثیر اصلی با استفاده از معیار روت به اثبات پایداری نقاط تعادل می پردازیم و با دو روش اثبات می کنیم هنگامیکه عدد تکثیر اصلی کوچکتر از یک باشد نقطه تعادل فارغ از بیماری مجانبا پایدار سراسری است همچنین ثابت مي‌*کنیم* اگر عدد تکثیر اصلی مساوی یک باشد، مدل دچار انشعاب می شود که انشعاب رو به عقب ( بازگشتی) نامیده مي‌*شود*.

کلمات کلیدی: مدل اپیدمیولوژی SIS؛ نقاط تعادل؛ پایداری محلی؛ پایداری سراسری؛ انشعاب برگشتی.

1. **مقدمه**

گسترش بیماریهای مختلف عفونی کشنده باعث بروز مشکلات جدی در زندگی روزمره ما مي‌*شود*. در میان انواع مختلف بیماری ها ، عمدتا بیماری های عفونی باعث حجم تأثیر پذیری روی شیوه زندگیمان از ابتدای جامعه مدنی شده اند. سابقه طولانی در استفاده از مدل ریاضی برای کنترل بیماریها وجود دارد [1]، [2]، [3]، [4]، [5]، [6]، [7]. در جامعه مدنی امروز ، در مطالعه مدل های اپیدمیولوژی محاسبه نقاط تعادل و بررسی پایداری آنها مهم است. یکی از مهمترین ابزار در تجزیه و تحلیل یک مدل ریاضی اپیدمیولوژی، محاسبه نقاط تعادل و تعیین پایداری آنها است. این مقاله همانندزیرتنظیم شده است:

در بخش2 یک مدل اپیدمیولوژی را معرفی مي‌*کنیم*. در بخش 3 عدد تکثیر اصلی را محاسبه مي‌*کنیم*، همچنین نقاط تعادل را محاسبه و به اثبات پایداری نقاط تعادل مي‌*پردازیم*. بویژه ثابت مي‌*کنیم*. در حالت دچار انشعاب رو به عقب مي‌*شود* .در بخش 4 با شبیه سازی عددی ادعای خود را به نمایش مي‌*گذاریم*. در بخش 5 نتیجه گیری مختصر ارائه مي‌*دهیم*.

**2- معرفی یک مدل دو بعدی**

در زیر یک مدل اپیدمیولوژی به شکل که به وسیله [8] معرفی شد در نظر مي‌*گیریم*.

⊛

که جمعیت حساس، و جمعیت عفونی شده. در اینجا فرض مي‌*کنیم* که کل جمعیت سیستم ثابت بمانند و این پدیده ممکن است اگر فرض کنیم که میزان تکثیر و میزان مرگ برابر هستند. بنابراین، فرض بر این است که در هر زمانt، تکثیر جدید جمعیت به میزان مرگ هر جمعیتباشد. مادر نظر مي‌*گیریم* که میزان انتقال بیماری هست و برطبق تابع انتقال به‌صورت: در نظرگرفته مي‌*شود* که در آن α ثابت نیمه اشباع است. بخشی از این بیماری به طور طبیعی بهبود مي‌*یابد* (مطابق ظرفیت میزان بهبودی طبیعی با m در نظر گرفته مي‌*شود*) و برخی به دلیل استفاده از درمان مناسب. در اینجا یک تابع درمان اشباع پیشنهاد شده است، جایی که r یک مقدار مثبت است، b یک مقدار غیر منفی است و u کنترل درمانی است. همچنین فرض کنید که بهبودی از نوع دائمی نیست و بنابراین تمام جمعیت بهبود یافته دوباره حساس این بیماری خواهد بود. با شروط اولیه:

از آنجا که ما جمعیت را به شکل نرمال در نظر مي‌*گیریم* بنابراین داریم:

**3. عدد تکثیر اصلی و نقاط تعادل و معیار پایداری**

 *به دلیل اهمیت زیاد عدد تکثیر اصلی سیستم ، آن را در زیر* به‌*دست* مي‌*آوریم .*

محاسبه عدد تکثیر اصلی به‌وسیله شعاع طیفی ماتریس تعیین مي‌*شود* که در آن و ماتریس های نسل بعدی متناظر با دستگاه ⊛ و به‌صورت زیر مي‌*باشد:*

بنابراین عدد تکثیر اصلی که آن را با نشان مي‌*د*هیم به‌صورت زیر است:

سیستم (1) دارای یک نقطه تعادل فارغ از بیماری و دو تا نقطه تعادل اندمیک مي‌*باشد*

نقطه تعادل آندمیک را به‌صورت زیر نشان مي‌*د*هیم

*با توجه به دستگاه* ⊛*داریم:*

رابطه و را با هم جمع مي‌*کنیم* و در رابطه جایگزین مي‌*کنیم*:

*با فاکتورگیری از داریم:*

*جواب بدیهی که در حقیقت همان نقطه تعادل فارغ از بیماری است یعنی وجواب غیر بدیهی* به‌صورت *زیر است:*

*با توجه* به‌اینکه*:*

دیگر و  که در آن و ریشه ها معادله درجه دوم هستند.

به‌طوریکه:

*معادله درجه دوم دارای دوریشه و می باشد که ریشه بزرگتر را با نشان* مي‌*د*هیم

*اینک* مي‌*توان نوشت:*

نقطه تعادل آندمیک فقط موقعی که باشد وجود دارد، تعادل آندمیک دیگه ممکن است وجود داشته باشد برای و اما اگر وجود داشته باشد همیشه ناپایدار خواهد بود.

**1-3 *اثبات مجانباَ پایداری محلی نقطه تعادل فارغ از بیماری* دستگاه ⊛ *در حالت***

پایداری محلی نقطه تعادل فارغ از بیماری دستگاه ⊛ را در حالت به‌صورت قضیه زیر بیان و اثبات مي‌کنیم.

**قضیه1.** اگر باشد نقطه تعادل فارغ از بیماری مجانبا پایدار محلی است و اگر باشد نقطه تعادل فارغ از بیماری ناپایدار است.

اثبات:

 با معیار روت اثبات مي‌کنیم ابتدا خطی سازی حول نقطه تعادل فارغ از بیماری

 *مثبت است ثابت* مي‌کنیم *اگر باشد و مثبت هستند*

*آرایه روت* به‌صورت *زیر است*

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| *0* |  |
|  |  |

*ردیف اول آرایه روت مثبت است بنابراین نقطه تعادل فارغ از بیماری هنگا* مي‌که *باشد مجانبا پایدار محلی است*

*و در پایین ثابت* مي‌کنیم *اگر*  *باشد، منفی است:*

*ردیف اول آرایه روت تغییر علامت* مي‌دهد *پس نقطه تعادل فارغ از بیماری در حالت پایدار مجانبی محلی نیست.*

**2-3 *اثبات مجانباَ پایداری سراسری نقطه تعادل فارغ از بیماری* دستگاه ⊛ *در حالت***

پایداری سراسری نقطه تعادل فارغ از بیماری دستگاه ⊛ را در حالت به‌صورت قضیه زیر بیان و اثبات مي‌کنیم.

**قضیه2.** نقطه تعادل فارغ از بیماری مجانبا پایدار سراسری است اگر

اثبات: از معادله (2) سیستم ⊛ ، به‌دست مي‌آوریم:

*با توجه به اینکه است داریم:*

با توجه به رابطه ی :

*داریم:*

یعنی

واضح است اگر باشد و بنابراین

از نامعادله بالا نتیجه مي‌گیریم که اگر سپس هنگامیکه .

بنابراین  *هنگامیکه زیرا بنابراین قضیه اثبات شده است. ⧠*

 *در قضیه زیر ثابت* مي‌کنیم *برای اثبات پایداری سراسری نقطه تعادل فارغ از بیماری نیازی به شرط نیست، و* مي‌توان به‌طور *مستقیم از قضیه پایداری سراسری استفاده کرد.*

***قضیه 3.*** *با استفاده از قضیه پایداری سراسری* [9]  *ثابت* مي‌کنیم *هرگاه نقطه تعادل فارغ از بیماری پایدار سراسری است.*

*اثبات:* به‌طور مستقيم قضيه پایداری سراسری را به‌كار مي‌بريم بر طبق آن قضيه هنگامي كه شرایط برقرار باشند. اگر باشد. نقطه تعادل فارغ از بيماري پايدار مجانبي سراسري است. نقطه تعادل فارغ از بیماری مدل، است. با نشان دادن شرط كه در مدل صادق است شروع مي‌كنيم. در زير دستگاه غير عفوني ، مقداررا قرار مي‌دهيم. پس:

با تغییر متغیر

اگر آنگاه . واضح است هنگامی که زمان به‌سمت بینهایت میل مي‌کند تعداد افراد در معرض خطر، در حدود جمعیت کل هستند. بنابراین ، به‌طور مجانبی پایدار سراسری است. در نتیجه شرط برقرار است. براي شرط داريم*.*

که در آن

جمعیت کل 1 در نظر گرفته شده است. پس و بنابراین و واضح است که مثبت است. بنابراین شرط برقرار است. بر طبق قضيه پایداری سراسری نقطه تعادل فارغ از بيماري، هرگاه باشد پايدار مجانبي سراسري است. □

***قضیه 4.*** *تعادل آندمیک*  *مجانباً پایدار محلی اگر*   *با .*

*اثبات: معادله مشخصه سیستم* ⊛*حول تعادل آندمیک داده* مي‌شود *با*

بنابراین اگر باشد با معیارروت-هورویتز تعادل آندمیک به‌صورت محلی پایدار است.

ثابت مي‌کنیم تعادل آندمیک فقط موقعی که باشد  *مجانباً پایدار محلی* است، برای اثبات ازمعیار روت استفاده مي‌کنیم ابتدا چند جمله ای مشخصه سیستم را مي‌نویسیم با خطی سازی حول نقطه تعادل داریم:

که در آن:

 *در نتیجه:*

*بنابراین:*

 *مثبت است ثابت* مي‌کنیم *مثبت هستند*

*و همچنین با توجه به رابطه های زیر:*

*داریم:*

*و همچنین با توجه به رابطه داریم:*

*و همچنین داریم:*

بنابراین نقطه تعادل آندمیک هنگامیکه است مجانبی پایدار محلی است*.*

 *توجه 1.* دیدیم برای سیستم⊛ فقط یک تعادل فارغ از بیماری دارد که مجانباً پایدار سراسری است در حالیکه برای این تعادل فارغ از بیماری ناپایدار مي‌شود و در حالیکه مجانباً پایدار مي‌شود.

ثابت مي‌کنیم در سیستم ⊛ دچار انشعاب می شود که انشعاب رو به عقب ( بازگشتی) نامیده مي‌شود.

در شکل3 ، وجود منحنی انشعاب رو به عقب را با در نظر گرفتن یک مجموعهای از پارامترها، نشان مي‌دهیم.

 در قضیه بعدی وجود انشعاب رو به عقب مانده مدل⊛ را ثابت مي‌کنیم.

**قضیه 5.** مدل ⊛ در دچار انشعاب رو به عقب مي‌شود اگر و فقط اگر .

**اثبات:**

اگر نمودار را نظر بگیریم ، واضح است که با توجه به رابطه برای ، صفر مي‌شود، بنابراین از ریشه عبور مي‌کند.

با توجه به رابطه زیر:

*جواب بدیهی نقطه تعادل فارغ از بیماری است و تنها یک جواب غیر بدیهی داریم که نقطه تعادل آندمیک است واضح است که حتماً است زیرا در غیر اینصورت منفی و غیر قابل قبول است.*

*برای حالت*  *دو ریشه داریم که با افزایش یکی از ریشه ها حتماً مثبت است* بنابراین ، اگر مقدار را افزایش دهیم از به آن تضمین خواهد کرد که در برخی از بازه های باز که مي‌گوییم روی هر تابع دارای دو ریشه حقیقی مثبت است. *به عبارت دیگر اگر باشد پس*  دو حالت و را بررسی مي‌کنیم:

 *با افزایش با توجه به رابطه*  برای، مثبت می شود و مثبت است و داریم:

دو ریشه مثبت داریم زیرا یکی از ریشه ها

ریشه ی دیگر هم مثبت زیرا داریم:

بنابراین ، آن می تواند ثابت شود که دو تعادل آندمیک وقتی که و وجود دارد. از سوی دیگر اگر و باشد، هیچ ریشه حقیقی مثبت برای وجود ندارد.

*نشان* مي‌دهیم *با توجه به رابطه*  برای تنها یک ریشه قابل قبول داریم، منفی می شود و منفی است و داریم:

تنها یک ریشه مثبت داریم :

ریشه ی دیگر منفی و غیر قابل قبول است زیرا داریم:

بنابراین برای حالت  یک تعادل آندمیک منحصر به فرد وجود دارد .

مهم: به عبارت ساده تر مي‌توان گفت

الف: اگر: باشد، است و یک ریشه مثبت داریم (یک نقطه تعادل آندمیک).

ب: اگر باشد و باشد دو ریشه مثبت داریم (دو نقطه تعادل آندمیک).

ج: اگر باشد و باشد ریشه ها مطابق زیر هستند:

یعنی هر دو ریشه منفی اند که غیر قابل قبول است. (نقطه تعادل آندمیک نداریم).

د: اگر باشد یک تعادل آندمیک منحصر به فرد وجود دارد.

**4-شبیه سازی عددی:**

***1-******4*** *نتایج عددی برای حالت*  *(شکل 1)از مقادیر اولیه* [8] نقطه تعادل فارغ از بیماری دستگاه ⊛ ، (1,0) بدست مي‌آید. در حالت منحنی بالا برای جمعیت حساس( ) و منحنی پایین برای جمعیت عفونی () رسم مي‌کنیم . زمان را در محور افقی رسم کرده ایم با گذشت زمان منحنی ها *به سمت* نقطه تعادل فارغ از بیماری *S=1* و I=0 ، میل مي‌کنند***.***

*2-4 نتایج عددی برای حالت**(شکل 2) از مقادیر اولیه* [8] دستگاه ⊛ با گذشت زمان منحنی ها *به سمت* نقطه تعادل آندمیک ، میل مي‌کنند***.***

*3-4 نتایج عددی برای حالت**(شکل 3) از مقادیر اولیه* [8] دستگاه ⊛ دچار انشعاب رو به عقب مي‌شود.

|  |  |
| --- | --- |
| شکل 1.تصوير فضای فاز براي مدل [8]، با عدد تکثيراصلي است ، با گذشت زمان منحنی بالا به 1 و منحنی پایین به صفر نزديک مي‌شوند. |  |
| شکل 2.تصوير فضای فاز براي مدل [8]، با عدد تکثيراصلي است ، با گذشت زمان منحنی ها *به سمت* نقطه تعادل فارغ از بیماری میل مي‌كنند. |  |
| شکل 3. شکل 1.تصوير فضای فاز براي مدل [8]، با عدد تکثيراصلي است ، دچار انشعاب رو به عقب مي‌شود. |  |

**5. نتیجه گیری**

در این مقاله ، یک مدل اپیدمیولوژی SIS را مورد برررسی قرار دادیم که دارای سه نقطه تعادل بود با توجه به اهمیت زیاد پایداری نقاط تعادل یک سیستم به اثبات پایداری نقاط تعادل باتوجه به حدود عدد تکثیر اصلی پرداختیم، پایداری سراسری نقطه تعادل آندمیک را با دو روش اثبات کردیم همچنین ثابت کردیم در حالت دارای انشعاب برگشتی است و با شبیه سازی عددی مشاهده کردیم.

***منابع***

[1] W. O. Kermack and A. G. Mackendric, Contribution to the mathematical theory of

epidemics, Proc. Roy. Soc. London Ser*. A* **115** (1927) 700–721.

[2] T. K. Kar and S. Jana, A theoretical study on mathematical modelling of an infectious

disease with application of optimal control, *Biosystems* **111** (2013) 37–50.

[3] J. C. Eckalbar and W. L. Eckalbar, Dynamics of an epidemic model with quadratic

treatment, Nonlinear Anal. Real World Appl*.* **12**(1) (2011) 320–332.

[4] T. K. Kar and P. K. Mandal, Global dynamics of a tuberculosis epidemic model and

the influence of backward bifurcation, J. Math. Model. Algorithm**11** (2012) 433–459.

[5] A. B. Gumel and S. M. Moghadas, A qualitative study of a vaccination model with

nonlinear incidence*,* Appl.Math*.* Comput*.* **143** (2003) 409–419.

[6] B. Buonomo and D. Lacitignola, On the backward bifurcation of a vaccination model

with nonlinear incidence, Nonlinear Anal. Model. Control**16**(1) (2008) 30–46.

[7] Y. Zhou, K. Yang, K. Zhou and Y. Liang, Optimal vaccination policies for an SIR

model with limited resources, Acta Biotheor*.* **62** (2014) 171–181.

[8] Swapan Kumar Nandi and T.K.Kar,Soovoojeet Jana, **Analysis of a fuzzy epidemic model with saturated**

**treatment and disease transmission**. World Scientific Publishing Company.( 2018)

DOI: 10.1142/S179352451850002X

[9] Shu Liao and Jin Wang, Global stability analysis of epidemiological models based

on Volterra–Lyapunov stable matrices, Chaos, Solitons & Fractals 45 (2012) 966–977

1. [↑](#footnote-ref-1)
2. تلفن همراه:09159769940 [↑](#footnote-ref-2)