

## شبیه‌سازی عددی سریع یک مدل ریاضی کسری بیماری کووید-۱۹

آمنه طالعی<sup>\*</sup>، اعظم جعفری

دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز، ایران

نویسنده مسئول مقاله \*

a.taleei@sutec.ac.ir

چکیده: اخیراً انواع مختلفی از مدل‌های ریاضی در توصیف داده‌های بالینی موجود برای بیماری کروناویروس در نظر گرفته شده‌اند. مدل‌سازی ریاضی و شبیه‌سازی محاسباتی ابزارهای مؤثری هستند که به تلاش‌های جهانی برای تخمین پارامترهای کلیدی کمک می‌کنند. در این مقاله قصد داریم یک شبیه‌سازی عددی سریع و مؤثر برای مدل کسری *SEIPAHRF* انجام دهیم. کلید واژه‌ها: شبیه‌سازی عددی سریع، مدل کسری *SEIPAHRF*، مشتق کسری کاپوتو، کووید-۱۹، معادلات دیفرانسیل کسری.

### ۱. مقدمه

در دسامبر ۲۰۱۹ میلادی (آذرماه ۱۳۹۸ خورشیدی) یک ویروس جدید متعلق به‌گونه کروناویروس در ووهان چین کشف شد. این ویروس توجه جهانی را به خود جلب کرد و به سرعت در جهان گسترش یافت. مطالعه و تحلیل گسترش بیماری‌های واگیردار از طریق مدل‌های ریاضی به ابزار مهمی برای درک نمونه‌های اولیه اپیدمیولوژیک بیماری‌ها مانند گسترش، مدت زمان اپیدمی و بار آن بر جمعیت تبدیل شده است. همه‌گیری کووید-۱۹ دلیل هزاران عفونت تایید شده همراه با مرگ و میر بسیار در سراسر جهان به‌عنوان یکی از بزرگ‌ترین تهدیدهای جهانی می‌باشد. در حال حاضر مدل‌های ریاضی بسیاری برای رفتار دینامیک انتقال بیماری‌های عفونی موجود می‌باشد. چنین مدل‌هایی نقش مهمی در کمک به تعیین کمیت کنترل بیماری‌های عفونی احتمالی و استراتژی‌های کاهش آن ایجاد می‌کنند. به تازگی، توجه زیادی در مورد مدل‌هایی با معادلات مرتبه کسری در بیماری‌های همه‌گیر در نظر گرفته شده است [۳]. مهم‌ترین ویژگی این مدل‌ها اثر حافظه آن‌ها است که در معادلات دیفرانسیل معمولی ظاهر نمی‌شود. اگر چه تاکنون روش‌های مدل‌سازی متعددی برای بیماری کروناویروس پیش بینی شده است، اما هنوز می‌توان موارد زیادی را بهبود بخشید. لذا برای درک مسایل دنیای واقعی و تجزیه و تحلیل وضعیت واقعی، مدل‌سازی براساس مشتق مرتبه کسری از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. اخیراً مدل مرتبه کسری *SEIPAHRF* توسط دایو<sup>۱</sup> و همکاران [۴] برای تحلیل رفتار کووید-۱۹ بیان شده است. این مدل مرتبه کسری به خوبی شیوع کووید-۱۹ را در اسپانیا با مرتبه  $\alpha = 0.85$  و در پرتغال با مرتبه  $\alpha = 0.75$  توصیف می‌کند. در این مقاله قصد داریم به ارایه یک شبیه‌سازی سریع و مؤثر برای مدل مرتبه کسری *SEIPAHRF* بپردازیم. در این مدل، مشتق زمان-کسری کاپوتو از مرتبه  $\alpha \in (0, 1)$  است که به‌صورت زیر بیان

<sup>1</sup>Ndairou

می‌شود:

$${}^C D_{0,t}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f'(s) ds, \quad (1)$$

که در آن  $\Gamma(1-\alpha) = \int_0^{\infty} t^{-\alpha} \exp(-t) dt$  تابع گاما است.

## ۲. مدل کسری $SEIPAHRF$

ابتدا به معرفی مدل کسری  $SEIPAHRF$  می‌پردازیم [۲]. فرض کنیم کل جمعیت  $N$ ، در طول دوره مطالعه ثابت است. این مدل ریاضی دارای ۸ جز است که منجر به سیستم ۸ معادله مرتبه کسری می‌شود. به عنوان مراحل مختلف انتقال ویروس، افراد گروه‌بندی شده در طبقه‌های جداگانه قرار می‌گیرند. متغیرهای این مدل به صورت زیر می‌باشند:

$$S(t) + E(t) + I(t) + P(t) + A(t) + H(t) + R(t) + F(t) = N,$$

که در آن متغیر  $S$  برای افراد حساس،  $E$  افراد در معرض عفونی،  $I$  افراد علامت‌دار و عفونی،  $P$  افراد انتقال دهنده،  $A$  افراد عفونی بدون علامت،  $H$  افراد بستری در بیمارستان،  $R$  افراد بهبودیافته و  $F$  افراد فوت شده در نظر گرفته شده‌اند.

بنابراین، سیستم مرتبه کسری کاپوتو که مدل را توصیف می‌کند، به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\begin{cases} {}^C D^{\alpha} S(t_n) &= -\beta \frac{I(t_{n-1})}{N} S(t_{n-1}) - \ell \beta \frac{H(t_{n-1})}{N} S(t_{n-1}) - \beta' \frac{P(t_{n-1})}{N} S(t_{n-1}), \\ {}^C D^{\alpha} E(t_n) &= \beta \frac{I(t_{n-1})}{N} S(t_n) + \ell \beta \frac{H(t_{n-1})}{N} S(t_n) + \beta' \frac{P(t_{n-1})}{N} S(t_n) - \kappa E(t_{n-1}), \\ {}^C D^{\alpha} I(t_n) &= \kappa \rho_1 E(t_n) - (\gamma_a + \gamma_i) I(t_{n-1}) - \delta_i I(t_{n-1}), \\ {}^C D^{\alpha} P(t_n) &= \kappa \rho_2 E(t_n) - (\gamma_a + \gamma_i) P(t_{n-1}) - \delta_p P(t_{n-1}), \\ {}^C D^{\alpha} A(t_n) &= \kappa (1 - \rho_1 - \rho_2) E(t_n), \\ {}^C D^{\alpha} H(t_n) &= \gamma_a (I(t_n) + P(t_n)) - \gamma_r H(t_{n-1}) - \delta_h H(t_{n-1}), \\ {}^C D^{\alpha} R(t_n) &= \gamma_i (I(t_n) + P(t_n)) + \gamma_r H(t_n), \\ {}^C D^{\alpha} F(t_n) &= \delta_i I(t_n) + \delta_p P(t_n) + \delta_h H(t_n). \end{cases} \quad (2)$$

به طوری که  $\beta$  ضریب انتقال انسان به انسان،  $\beta'$  انتقال ناشی از انتقال دهنده‌ها،  $\ell$  میزان انتقال نسبی بیماران بستری در بیمارستان،  $\kappa$  میزان خروج یک فرد از طبقه در معرض عفونی،  $\rho_1$  نسبت پیشرفت از طبقه  $E$  به  $I$ ،  $\rho_2$  نرخ افراد در معرض عفونی که به انتقال دهنده‌ها تبدیل می‌شود،  $1 - \rho_1 - \rho_2$  نسبت پیشرفت از طبقه افراد عفونی بدون علامت،  $\gamma_a$  میانگین میزان بستری شدن افراد علامت‌دار و انتقال دهنده‌ها،  $\gamma_i$  میزان بهبودی بدون بستری در بیمارستان،  $\gamma_r$  میزان بهبودی بیماران بستری در بیمارستان،  $\delta_i$  میزان مرگ و میر ناشی از افراد آلوده،  $\delta_p$  میزان مرگ و میر ناشی از افراد انتقال دهنده‌ها و  $\delta_h$  میزان مرگ و میر ناشی از افراد بستری در بیمارستان در نظر گرفته شده‌اند.

### ۳. شبیه‌سازی سریع مدل کسری

در این بخش به ارزیابی سریع برای تقریب مشتق کسری کاپوتو (۱) در زمان  $t_n$  می‌پردازیم. ابتدا انتگرال را به دو قسمت موضعی و تاریخی تقسیم می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} {}^C D_{\circ, t}^{\alpha} f^{t_n} &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\circ}^{t_n} \frac{f'(s)}{(t_n-s)^{\alpha}} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\circ}^{t_{n-1}} \frac{f'(s)}{(t_n-s)^{\alpha}} ds + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{f'(s)}{(t_n-s)^{\alpha}} ds \\ &:= C_h(t_n) + C_{\ell}(t_n), \end{aligned} \quad (3)$$

که  $C_{\ell}(t_n)$  و  $C_h(t_n)$  به ترتیب قسمت تاریخی و موضعی را مشخص می‌کنند. برای قسمت موضعی، تقریب به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} C_{\ell}(t_n) &\approx \frac{f(t_n) - f(t_{n-1})}{\tau_n^{\alpha} \Gamma(1-\alpha)} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{1}{(t_n-s)^{\alpha}} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{f(t_n) - f(t_{n-1})}{\tau_n^{\alpha}}. \end{aligned} \quad (4)$$

برای قسمت تاریخی، تقریب به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} C_h(t_n) &\approx \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[ \frac{f(t_{n-1})}{\tau_n^{\alpha}} - \frac{f(t_{\circ})}{t_n^{\alpha}} - \alpha \sum_{i=1}^{N_{\text{exp}}} w_i \int_{\circ}^{t_{n-1}} e^{-(t_n-\tau)s_i} f(\tau) d\tau \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[ \frac{f(t_{n-1})}{\tau_n^{\alpha}} - \frac{f(t_{\circ})}{t_n^{\alpha}} - \alpha \sum_{i=1}^{N_{\text{exp}}} w_i F_{\text{hist},i}(t_n) \right], \end{aligned} \quad (5)$$

به طوری که

$$\begin{aligned} F_{\text{hist},i}(t_n) &= e^{-s_i \tau_n} F_{\text{hist},i}(t_{n-1}) + \frac{e^{-s_i \tau_n}}{s_i^{\gamma} \tau_{n-1}^{\gamma}} \left[ (e^{-s_i \tau_{n-1}} - 1 + s_i \tau_{n-1}) f(t_{n-1}) \right. \\ &\quad \left. + (1 - e^{-s_i \tau_{n-1}} - e^{-s_i \tau_{n-1}} s_i \tau_{n-1}) f(t_{n-2}) \right], \end{aligned}$$

است.  $\tau_n = t_n - t_{n-1}$  از ترکیب معادلات (۴) و (۵) داریم [۱]:

$${}^C D_{\circ, t}^{\alpha} f(t_n) \approx \frac{f^n - f^{n-1}}{\tau_n^{\alpha} \Gamma(2-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[ \frac{f^{n-1}}{\tau_n^{\alpha}} - \frac{f^{\circ}}{t_n^{\alpha}} - \alpha \sum_{i=1}^{N_{\text{exp}}} w_i F_{\text{hist},i}(t_n) \right]. \quad (6)$$

حال به منظور گسسته‌سازی دستگاه معادلات دیفرانسیل (۲) با استفاده از تقریب (۶) برای مشتق کسری کاپوتو در زمان  $t_n$  خواهیم داشت:

$$\begin{cases} S^n = \frac{1}{b_n^{(n,\alpha)}} \left[ \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1}^{(n,\alpha)} - b_k^{(n,\alpha)}) S^k + b_1^{(n,\alpha)} S^0 \right] - \frac{\Gamma(1-\alpha)}{b_n^{(n,\alpha)}} \left( \beta \frac{I^{n-1}}{N} + \ell \beta \frac{H^{n-1}}{N} + \beta' \frac{P^{n-1}}{N} \right) S^{n-1}, \\ E^n = \frac{1}{b_n^{(n,\alpha)}} \left[ \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1}^{(n,\alpha)} - b_k^{(n,\alpha)}) E^k + b_1^{(n,\alpha)} E^0 \right] + \frac{\Gamma(1-\alpha)}{b_n^{(n,\alpha)}} \left( \beta \frac{I^{n-1}}{N} S^n + \ell \beta \frac{H^{n-1}}{N} S^n + \beta' \frac{P^{n-1}}{N} S^n - \kappa E^{n-1} \right), \\ I^n = \frac{1}{b_n^{(n,\alpha)}} \left[ \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1}^{(n,\alpha)} - b_k^{(n,\alpha)}) I^k + b_1^{(n,\alpha)} I^0 \right] + \frac{\Gamma(1-\alpha)}{b_n^{(n,\alpha)}} \left( \kappa \rho_1 E^n - (\gamma_a + \gamma_i) I^{n-1} - \delta_i I^{n-1} \right), \\ P^n = \frac{1}{b_n^{(n,\alpha)}} \left[ \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1}^{(n,\alpha)} - b_k^{(n,\alpha)}) P^k + b_1^{(n,\alpha)} P^0 \right] + \frac{\Gamma(1-\alpha)}{b_n^{(n,\alpha)}} \left( \kappa \rho_2 E^n - (\gamma_a + \gamma_i) P^{n-1} - \delta_p P^{n-1} \right), \\ A^n = \frac{1}{b_n^{(n,\alpha)}} \left[ \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1}^{(n,\alpha)} - b_k^{(n,\alpha)}) A^k + b_1^{(n,\alpha)} A^0 \right] + \frac{\Gamma(1-\alpha)}{b_n^{(n,\alpha)}} \left( \kappa (1 - \rho_1 - \rho_2) E^n \right), \\ H^n = \frac{1}{b_n^{(n,\alpha)}} \left[ \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1}^{(n,\alpha)} - b_k^{(n,\alpha)}) H^k + b_1^{(n,\alpha)} H^0 \right] + \frac{\Gamma(1-\alpha)}{b_n^{(n,\alpha)}} \left( \gamma_a (I^n + P^n) - \gamma_r H^{n-1} - \delta_h H^{n-1} \right), \\ R^n = \frac{1}{b_n^{(n,\alpha)}} \left[ \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1}^{(n,\alpha)} - b_k^{(n,\alpha)}) R^k + b_1^{(n,\alpha)} R^0 \right] + \frac{\Gamma(1-\alpha)}{b_n^{(n,\alpha)}} \left( \gamma_i (I^n + P^n) + \gamma_r H^n \right), \\ F^n = \frac{1}{b_n^{(n,\alpha)}} \left[ \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1}^{(n,\alpha)} - b_k^{(n,\alpha)}) F^k + b_1^{(n,\alpha)} F^0 \right] + \frac{\Gamma(1-\alpha)}{b_n^{(n,\alpha)}} \left( \delta_i I^n + \delta_p P^n + \delta_h H^n \right). \end{cases} \quad (7)$$

به‌طوری‌که

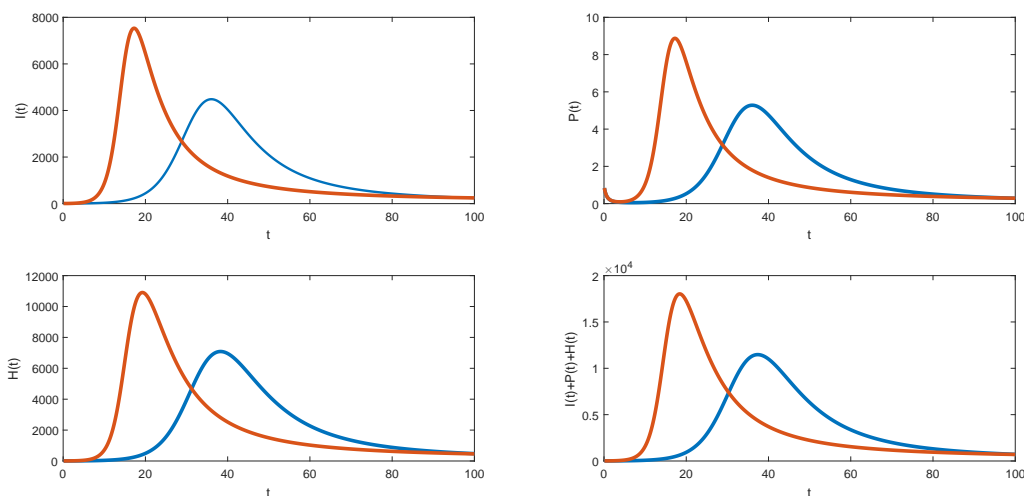
$$b_k^{(n,\alpha)} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N_{\text{exp}}} w_i \frac{1}{\tau_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-\tau_i(t_n-\tau)} d\tau, & k = 1, 2, \dots, n-1, \\ \frac{1}{\tau_n} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{d\tau}{(t_n-\tau)^\alpha}, & k = n. \end{cases}$$

#### ۴. نتایج عددی

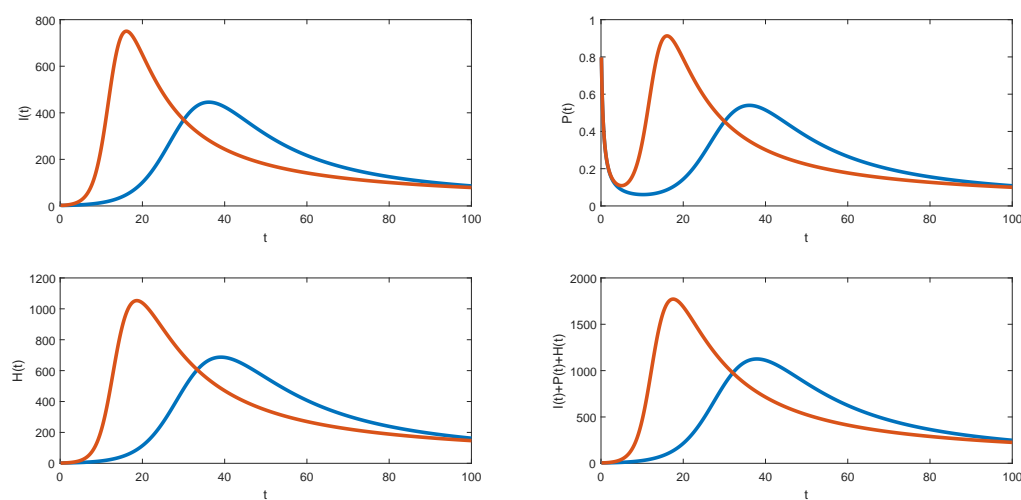
در این بخش، شبیه‌سازی عددی را در دو منطقه اسپانیا و پرتغال نشان خواهیم داد تا نمای وسیعی از تکامل زمانی جمعیت‌های آلوده نشان داده شود. شکل‌های ۱ و ۲ شبیه‌سازی عددی رفتار دینامیکی افراد آلوده ( $I$ )، افراد انتقال دهنده ( $P$ )، افراد بستری در بیمارستان ( $H$ ) و موارد تجمعی عفونت‌ها ( $I + P + H$ ) را به ترتیب برای اسپانیا و پرتغال نشان می‌دهند. لازم به ذکر است که برای شبیه‌سازی رفتار دینامیکی مدل، از پارامترهای مرجع [۴] استفاده کرده‌ایم.

#### مراجع

- [1] Jiang S. D., Zhang J. W., Zhang Q. and Zhang Z. M., "Fast evaluation of the Caputo fractional derivative and its applications to fractional diffusion equations", *Communications in Computational Physics*, **21**, 650-678 (2017).
- [2] Ndaïrou F., and Torres D. F., "Mathematical Analysis of a Fractional COVID-19 Model Applied to Wuhan, Spain and Portugal", *Axioms*, **10**, 135 (2021).
- [3] Ndaïrou F., Area I., Nieto J. J. and Torres D. F., "Mathematical modeling of COVID-19 transmission dynamics with a case study of Wuhan", *Chaos, Solitons and Fractals*, **135**, 109846 (2020).



شکل ۱: روند انتقال دینامیکی برای اسپانیا با  $\alpha = ۰.۸۵$  (آبی  $\beta = ۱/۵۵$  و قرمز  $\beta = ۳/۵۵$ )



شکل ۲: روند انتقال دینامیکی برای پرتغال با  $\alpha = ۰.۷۵$  (آبی  $\beta = ۱/۵۵$  و قرمز  $\beta = ۳/۵۵$ )

- [4] Ndaïrou F., Area I., Nieto J. J., Silva C. J., and Torres D. F., “Fractional model of COVID-19 applied to Galicia, Spain and Portugal”, *Chaos, Solitons and Fractals*, **144**, 110652 (2021).

## Fast Numerical Simulation of a Fractional Mathematical Model of the COVID-19 Disease

Ameneh Taleei, Azam Jafari

Faculty of Mathematics, Shiraz University of Technology, Shiraz, Iran

a.taleei@sutech.ac.ir

**Abstract**— Recently, various types of mathematical models have been considered in describing the available clinical data for coronavirus disease. Mathematical modeling and computation simulation are effective tools that contribute to global efforts to estimate key parameters. In this paper, we intend to perform a fast and effective numerical simulation for the SEIPAHRF fractional model.

**Keywords**—Fast numerical simulation, SEIPAHRF fractional model, Caputo fractional derivative, COVID-19, Fractional differential equations.