

بررسی یک مدل ریاضی کسری $SEIR$ برای کنترل بیماری کووید-۱۹

محمود دادخواه^{۱*}، نازلی بشارتی^۲

^۱ دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران
^۲ دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

m_dadkhah@pnu.ac.ir

چکیده: در این مقاله، یک مدل ریاضی کسری $SEIR$ برای بررسی اثرات فاصله گذاریهای اجتماعی بر کنترل گسترش ویروس کووید-۱۹ ارائه می شود. دو کنترل در این مدل در نظر گرفته خواهد شد: کنترل اول آموزش رسانه ای (از طریق تلاشهایی که اهمیت فاصله گذاری اجتماعی، استفاده از ماسک صورت و غیره را برای عموم توضیح می دهند) و کنترل دوم قرنطینه شدن (در منزل ماندن) افراد در معرض ابتلا است. شکل کلی مسئله کنترل بهینه مرتبه کسری و شرایط بهینگی متناظر با آن، به منظور حداقل کردن تعداد افراد مستعد ابتلا و آلوده و حداکثر کردن تعداد بهبودیافتگان مورد بررسی قرار می گیرد. با شبیه سازیهای انجام شده، به راحتی می توان دید که با انجام اقدامات کنترلی مؤثر، روند گسترش بیماری به میزان قابل توجهی کاهش می یابد.

کلید واژه ها: کووید-۱۹، حسابان کسری، مشتق کاپوتو، کنترل بهینه، مدلسازی ریاضی.

۱. مقدمه

ویروس کووید-۱۹ (یا ویروس کرونا) در دسامبر ۲۰۱۹ در شهر ووهان چین با همه گیری در انسان شیوع پیدا کرد و پس از مدت کوتاهی تمام جهان را درگیر کرد. بر اساس داده های بالینی گزارش شده از ووهان، بیماران مسن و سالخوردگان در مقایسه با افراد با سن پایین، علائم شدید با میزان مرگ و میر بالاتری را تجربه کرده اند [۱]. مطالعه هم چنین نشان می دهد که تقریباً ۸۰ درصد از افراد آلوده به کرونا ویروس ناقلان بدون علامت هستند اما هنوز قادر به انتقال ویروس به دیگران هستند [۲، ۳]. این امر باعث شده است که شناسایی و مهار کرونا ویروس بسیار چالش برانگیز باشد. در نتیجه، رعایت پروتکل های بهداشتی و فاصله گذاریهای اجتماعی در بسیاری از کشورهای جهان به طور گسترده ای الزامی شده است تا انتقال ویروس از طریق تماس انسان با انسان را به حداقل برسانند.

مدل های متعددی با نمادگذاریهای $SEIR$ ، $SEIRS$ ، SI ، SIR و... جهت شبیه سازی الگوهای انتشار بیماری های همه گیر مورد توجه و استفاده قرار گرفته اند. در این میان، مدل $SEIR$ یک مدل شناخته شده است که در شبیه سازی محاسباتی و مدلسازی بسیاری از بیماری های ویروسی و عفونی مانند مرس [۴]، آنفلوآنزای نوع A [۵، ۶] و در این اواخر در شیوع ابولا در سال ۲۰۱۸ مورد استفاده قرار گرفته است [۷]. در این مقاله، یک مدل ریاضی کسری $SEIR$ برای بررسی اثرات فاصله گذاریهای اجتماعی بر کنترل گسترش ویروس کووید-۱۹ ارائه می دهیم. دو کنترل در این مدل در نظر گرفته خواهد شد: کنترل اول مبتنی بر آموزش رسانه ای، از طریق تلاشهایی که اهمیت فاصله گذاری اجتماعی، استفاده از ماسک صورت و غیره را برای عموم توضیح می دهند، است و کنترل دوم قرنطینه شدن (در منزل ماندن) افراد در معرض ابتلا است. شکل کلی مسئله

کنترل بهینه مرتبه کسری و شرایط بهینگی متناظر با آن، به منظور حداقل کردن تعداد افراد مستعد ابتلا و آلوده و حداکثر کردن تعداد بهبودیافتگان نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای توضیح یک مسئله عمومی کنترل بهینه با مرتبه غیرصحیح شرایط ضروری بهینگی با کمک مفهوم مشتق کسری کاپوتو بیان خواهد شد. سطوح بهینه دو کنترل مورد نظر به کمک نوع کسری اصل ماکزیم پونتریاگین مشخص می‌گردد. برای شبیه سازی از نرم افزار متلب استفاده شده است.

۲. تعاریف و مقدمات

تعریف ۱. برای $f \in C^m$ و $m \in \mathbb{N}$ مشتق کسری کاپوتو سمت چپ عبارت است از

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} \frac{d^m(f(\tau))}{d\tau^m} d\tau$$

و مشتق کسری کاپوتو سمت راست عبارت است از

$${}_t^C D_b^\alpha f(t) = \frac{(-1)^m}{\Gamma(m-\alpha)} \int_t^b (t-\tau)^{m-\alpha-1} \frac{d^m(f(\tau))}{d\tau^m} d\tau$$

که در آن $m-1 < \alpha \leq m$.

تعریف ۲. برای تابع انتگرال پذیر f ، مشتق کسری مرتبه α چپ از نوع ریمان-لیوویل عبارت است از:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

و مشتق کسری مرتبه α راست از نوع ریمان-لیوویل عبارت است از:

$${}_t D_b^\alpha f(t) = \frac{(-1)^m}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_t^b (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

که در آن $m \in \mathbb{N}$, $m-1 < \alpha \leq m$.

۳. بیان مدل

در مدل $SEIR$ یک بیماری اپیدمی عفونی، افراد به چهار بخش (چهارکامپارتمان) به صورت بخش افراد مستعد ابتلا (S)، بخش افراد در معرض ابتلا (E)، بخش افراد آلوده (I) و بخش افراد بهبودیافته (R) تقسیم می‌شوند. این روش مدل سازی بخشی، امکان انتقال جمعیت از یک بخش به بخش دیگر را فراهم می‌کند، بطوری که می‌توان میزان انتقال بیماری را با توجه به زمان شبیه سازی کرد. فرض کنیم نرخ مرگ و میر طبیعی در جامعه (مرگ طبیعی در تمامی بخش‌ها) برابر μ و نرخ مرگ در اثر بیماری، d باشد. همچنین فرض کنیم در هر واحد زمانی Λ عضو جدید به جامعه افزوده شود (متولدین تازه یا افراد مهاجر). مدل ساده‌ی کسری و اصلاح شده زیر را به ازای $0 < \alpha \leq 1$ ، برای بررسی گسترش ویروس کووید - ۱۹ در نظر می‌گیریم: [۹]

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha S(t) = \Lambda - \beta_1 S(t)E(t) - \beta_2 S(t)I(t) - \mu S(t) + \tau R(t), \\ {}^C D_t^\alpha E(t) = \beta_1 S(t)E(t) + \beta_2 S(t)I(t) - (\mu + \rho)E(t), \\ {}^C D_t^\alpha I(t) = \rho E(t) - (\gamma + d + \mu)I(t), \\ {}^C D_t^\alpha R(t) = \gamma I(t) - (\mu + \tau)R(t), \end{cases} \quad (1)$$

که در آن، β_1, β_2 نرخهای شیوع، τ نرخ عود بیماری، ρ نرخ تبدیل فرد در معرض ابتلا به فرد آلوده و γ نرخ بهبودی فرد است. پارامترهای ظاهر شده در سیستم معادلات بالا همگی مقادیری مثبت، ثابت و مقدار تعریف شده‌ای دارند. برای مدل فوق فرض خواهیم کرد که $(S, E, I, R) \in \mathbb{R}_+^4$. همچنین $S(\circ) = S_0, E(\circ) = E_0, I(\circ) = I_0, R(\circ) = R_0$ ، بطوریکه اگر کل جمعیت موجود $N(t)$ باشد، آنگاه رابطه‌ی $N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$ برقرار است. دلیل آنکه در این مقاله به جای معادلات دیفرانسیل مرتبه صحیح، معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی کسری که تعمیمی از معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی صحیح است، مورد بررسی قرار گرفته است آن است که معادلات دیفرانسیل کسری می‌تواند به ما در کاهش خطاهای ناشی از پارامترهای نادیده گرفته شده در مدل‌سازی پدیده‌های واقعی زندگی و واقعی‌تر شدن مدل کمک کند.

۱-۳. مدل کسری

فرض کنیم $\mathbb{R}_+^4 = \{X \in \mathbb{R}^4, X \geq 0\}$ و $X(t) = (S(t), E(t), I(t), R(t))^T$ باشد.

قضیه ۱. برای معادلات بیان شده در رابطه ؟؟ یک جواب منحصر بفرد در \mathbb{R}_+^4 وجود دارد.

دستگاه کنترلی مورد نظر در این مقاله، می‌تواند به فرم سیستم معادلات کسری با شرط اولیه داده شده زیر بیان شود:

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha X(t) = f(X(t), u(t), t), \\ X(\circ) = x_0, \end{cases} \quad (2)$$

که در آن $0 < \alpha \leq 1$ و $X(t)$ بردار n تایی حالت است. همچنین f تابع برداری داده شده و $u(t)$ بردار m بعدی کنترل در بازه $t \in [0, t_f]$ است (منظور از $t_f > 0$ زمان نهایی فرآیند کنترل است.) و مسئله کنترل بهینه می‌تواند شامل ماکزیم یا می‌نیم کردن تابع هزینه

$$J(u(\cdot)) = \theta(X(t_f), t_f) + \int_0^{t_f} \phi(X(t_f), u(t), t) dt \quad (3)$$

با شرایط سیستم کنترلی ؟؟ باشد. [به مراجع ؟؟] مراجعه کنید. تابع θ و ϕ در بخش بعدی مشخص خواهند شد. در اینجا t_f مقداری ثابت اما $X(t_f)$ آزاد است. برای یافتن جواب کنترل بهینه $u(t)$ متناظر با معادلات ؟؟-؟؟ از اصل ماکزیم پونتریاگین کسری استفاده خواهیم کرد.

قضیه ۲. [؟، ؟] برای بهینگی رابطه‌های ؟؟ و ؟؟ یک شرط لازم عبارت است از

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial u}((X(t), u(t), t)) + \lambda^T \frac{\partial f}{\partial u}(X(t), u(t), t) = 0 \\ {}^C D_t^\alpha X(t) = f(X(t), u(t), t), \quad X(\circ) = x_0 \\ {}_t D_{t_f}^\alpha \lambda(t) = \frac{\partial \phi}{\partial X}(X(t), u(t), t) + \lambda^T \frac{\partial f}{\partial X}(X(t), u(t), t) \\ \lambda(t_f) = \frac{\partial \theta}{\partial X}(X(t_f), t_f) \end{cases} \quad (4)$$

۴. مدل کسری با کنترل

به منظور بررسی کنترل گسترش بیماری کووید ۱۹ روی مدل بیان شده‌ی ؟؟ از دو متغیر کنترلی استفاده می‌کنیم. این دو کنترل آموزش رسانه‌ای (بیان و توضیح اهمیت فاصله‌گذاری اجتماعی و استفاده از ماسک و غیره) و قرنطینه شدن افراد در معرض ابتلا است. کنترل اولی را با $u_1(t)$ و

کنترل دومی را با $u_2(t)$ نمایش خواهیم داد، که $u_1(t)$ روی جمعیت مستعد ابتلا S و $u_2(t)$ روی جمعیت در معرض ابتلا E اعمال خواهد شد. بنابراین سیستم بدون کنترل معادله؟؟ به سیستم کنترلی به صورت زیر تبدیل می شود.

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha S(t) = \Lambda - \beta_1 S(t)E(t) - \beta_2 S(t)I(t) - \mu S(t) + \tau R(t) - u_1(t)S(t), \\ {}^C D_t^\alpha E(t) = \beta_1 S(t)E(t) + \beta_2 S(t)I(t) - (\mu + \rho)E(t) - u_2(t)E(t), \\ {}^C D_t^\alpha I(t) = \rho E(t) - (\gamma + d + \mu)I(t) + (1 - p)u_2(t)E(t), \\ {}^C D_t^\alpha R(t) = \gamma I(t) - (\mu + \tau)R(t) + u_1(t)S(t) + pu_2(t)E(t) \end{cases} \quad (5)$$

که p احتمال بهبودی فرد مبتلا (آلوده) بر اثر قرنطینه شدن است. اگر بخواهیم دستگاه؟؟ را به فرم برداری نمایش دهیم، می توان نوشت:

$${}^C D_t^\alpha X(t) = f(X(t), u(t)) \quad (6)$$

که در آن $X(t) = (S(t), E(t), I(t), R(t))$ بیانگر بردار حالت و $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$ بیانگر بردار کنترل است. اکنون مسئله کنترل بهینه را می توان چنین بیان کرد:

به حداقل رساندن گسترش بیماری کووید ۱۹ در حالی که تعداد جمعیت بهبود یافته به حداکثر می رسد. برای نیل به این هدف، تابع هزینه را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$Min J(u(\cdot)) = A_1 S(t_f) + A_2 E(t_f) + \int_0^{t_f} [A_3 I(t) - A_4 R(t) + \frac{1}{\gamma} (a_1 u_1^2(t) + a_2 u_2^2(t))] dt \quad (7)$$

در اینجا از وزن های مثبت $A_i, i = 1, \dots, 4$ و $a_i, i = 1, 2$ برای متعادل کردن فاکتورهای کنترلی استفاده می کنیم. اگر در در رابطه؟؟، قرار دهیم:

$$\theta(X(t_f)) = A_1 S(t_f) + A_2 E(t_f)$$

و

$$\phi(X(t), u(t)) = A_3 I(t) - A_4 R(t) + \frac{1}{\gamma} (a_1 u_1^2(t) + a_2 u_2^2(t))$$

آنگاه تابع هزینه رابطه؟؟، حالت خاصی از فرم عمومی رابطه تابع هزینه؟؟ است که در بخش قبلی بیان شد. به کمک قضیه؟؟ شرایط بهینگی لازم را می توان به صورت زیر بیان کرد:

الف) دستگاه کنترلی و شرط اولیه:

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha X = f(X, u) \\ X(0) = x_0. \end{cases} \quad (8)$$

ب) دستگاه الحاقی و شرط مرزی آن:

$$\begin{cases} {}_t D_t^\alpha \lambda(t) = \frac{\partial \phi}{\partial X} + \lambda^T \frac{\partial f}{\partial X}, \\ \lambda(t_f) = \frac{\partial \theta}{\partial X} \Big|_{t_f}, \end{cases} \quad (9)$$

(ج) شرط پایایی:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} + \lambda^T \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad (10)$$

که $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t), \lambda_4(t))$ و $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ داریم

$$\begin{cases} f_{\lambda} = \Lambda - \beta_{\lambda} S(t) E(t) - \beta_{\Upsilon} S(t) I(t) - \mu S(t) + \tau R(t) - u_{\lambda}(t) S(t), \\ f_{\Upsilon} = \beta_{\lambda} S(t) E(t) + \beta_{\Upsilon} S(t) I(t) - (\mu + \rho) E(t) - u_{\Upsilon}(t) E(t), \\ f_{\Upsilon} = \rho E(t) - (\gamma + d + \mu) I(t) + (\lambda - p) u_{\Upsilon}(t) E(t), \\ f_{\Upsilon} = \gamma I(t) - (\mu + \tau) R(t) + u_{\lambda}(t) S(t) + p u_{\Upsilon}(t) E(t) \end{cases} \quad (11)$$

دستگاه الحاقی اصل ماکزیمم پونتریاگین ایجاب می‌کند که

$$\left\{ \begin{array}{l} {}_tD_{t_f}^\alpha \lambda_1(t) = -\lambda_1 \beta_1 E(t) - \lambda_1 \beta_1 I(t) - \lambda_1 \mu + \lambda_1 \beta_1 E(t) + \lambda_1 \beta_1 I(t), \\ {}_tD_{t_f}^\alpha \lambda_1(t) = -\lambda_1 \beta_1 S(t) + \lambda_1 \beta_1 S(t) - \lambda_1 \mu - \lambda_1 \rho + \lambda_1 \rho, \\ {}_tD_{t_f}^\alpha \lambda_2(t) = A_2 - \lambda_1 \beta_2 S(t) + \lambda_2 \beta_2 S(t) - (\gamma + d + \mu) \lambda_2 + \gamma \lambda_3, \\ {}_tD_{t_f}^\alpha \lambda_3(t) = \tau \lambda_1 - \lambda_3 (\tau + \mu) - A_3, \end{array} \right. \quad (12)$$

که طبق شرط مرزی بیان شده:

$$\lambda_{\mathbb{I}}(t_f) = A_{\mathbb{I}}, \quad \lambda_{\mathbb{V}}(t_f) = A_{\mathbb{V}}, \quad \lambda_{\mathbb{W}}(t_f) = \circ, \quad \lambda_{\mathbb{F}}(t_f) = \circ \quad (13)$$

متغیرهای کنترلی با شرایط پایایی زیر داده می‌شوند:

$$\begin{cases} u_{\mathfrak{I}}(t) = (\frac{\lambda_{\mathfrak{I}}(t) - \lambda_{\mathfrak{F}}(t)}{a_{\mathfrak{I}}})S(t) \\ u_{\mathfrak{F}}(t) = (\frac{\lambda_{\mathfrak{F}} - (1-\rho)\lambda_{\mathfrak{R}} - \rho\lambda_{\mathfrak{F}}}{a_{\mathfrak{F}}})E(t) \end{cases} \quad (14)$$

۵. شبیه‌سازی عددی

در این بخش به کمک شبیه‌سازی عددی، نرم افزار متلب و بررسی و اعمال شرایط بیان شده‌ی بهینگی، نتایج بدست آمده در بخش‌های قبلی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. همانطور که در بخش قبلی توضیح داده شد، به کمک معادلات حالت و الحاق و نیز شرایط اولیه و مرزی بیان شده، از معادلات \ddot{x} ، \ddot{y} و $\ddot{\theta}$ شرایط بهینگی را محاسبه می‌کنیم. از روش عددی اجزاء محدود^۲ زمان پیشرو - فضا پسرو^۳ استفاده خواهیم کرد^[۴].

با شروع از یک حدس اولیه برای متغیرهای الحاق، یک روش اجزاء محدود زمان پیشرو - فضا پسرو برای حل معادلات حالت به کار گرفته می‌شود. در واقع نکته کلیدی، بازنویسی سیستم کنترلی^۴ به فرم انتگرالی معادل زیر:

$$X(t) = X(\circ) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\circ}^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(X(\tau), \mu(\tau)) d\tau \quad (15)$$

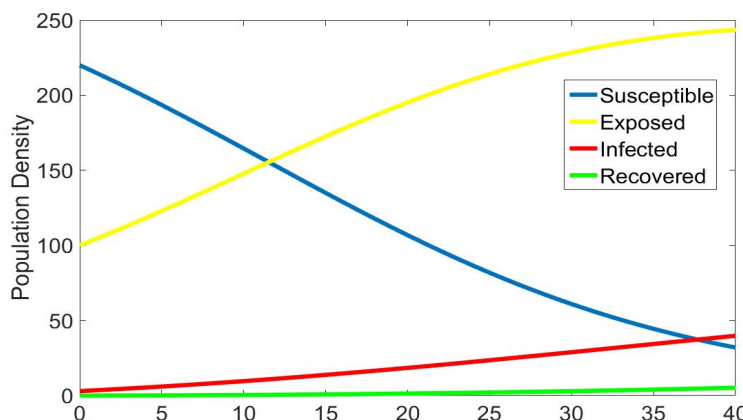
و سپس استفاده از روش تصحیح کننده‌ی پیشگوی تعمیم‌یافته آدامز [۹] برای جواب است. بعلاوه این مقادیر حالت، برای جواب معادلات الحاق به کمک روش اجزاء محدود زمان پسرو - فضا پیشرو به کار گرفته می‌شوند. بنابراین دستگاه؟؟ به روالی مشابه و به فرم معادله انتگرالی زیر نوشته می‌شود:

$$\lambda(t) = \frac{\partial \theta}{\partial X} \Big|_{t_f} + \frac{1}{\Pi(\alpha)} \int_t^{t_f} (t - \tau)^{\alpha-1} \left[\frac{\partial \phi}{\partial X} + \lambda^T \frac{\partial f}{\partial X} \right] d\tau \quad (16)$$

و با یافتن تقریبات متوالی برای کنترل بهینه تا حصول همگرایی لازم روش ادامه می‌یابد. برای آنکه بتوان نتایج را بهتر درک کرد. فرض کنیم (این داده‌ها کاملاً فرضی هستند): در شکل؟؟، مدل بیان شده؟؟ را در حالت کلاسیک ($\alpha = 1$) و با تمام بخشها رسم کرده‌ایم. همچنین در شکل‌های؟؟

$$\begin{aligned} S(0) &= 220, & E(0) &= 100, & I(0) &= 3, & R(0) &= 0, & t_f &= 40, \\ \Lambda &= 0.27, & \rho &= 0.0058, & \beta_1 &= 0.0021, & \beta_2 &= 0.0058, & d &= 0.0025, \\ \mu &= 0.001, & \gamma &= 0.007, & \tau &= 0.02, & p &= 0.3 \end{aligned}$$

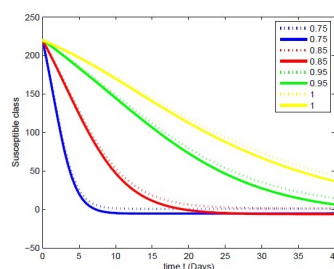
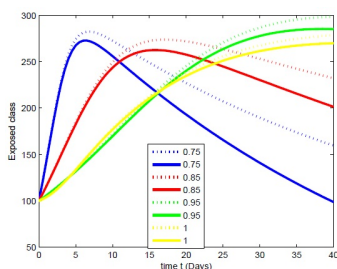
تا؟؟، به ترتیب برای جمعیت‌های مستعد ابتلا (S)، در معرض ابتلا (E)، آلوده (I) و بهبود یافته (R)، به ازای مقادیر فرضی بیان شده، مدل کسری بدون کنترل و با کنترل به ازای مقادیر مختلف α را رسم کرده‌ایم. خطوط نقطه چین نمایانگر سیستم کنترل نشده و خطوط توپر (ممتد) بیانگر سیستم تحت کنترل است. همانطور که در شکل‌ها دیده می‌شود، در سیستم بدون کنترل، تعداد افراد در معرض ابتلا و آلوده بالاتر است در حالیکه در سیستم تحت کنترل این افراد تعدادشان کمتر شده و تعداد افراد بهبود یافته نیز بالاتر می‌رود.



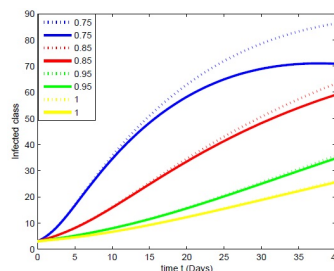
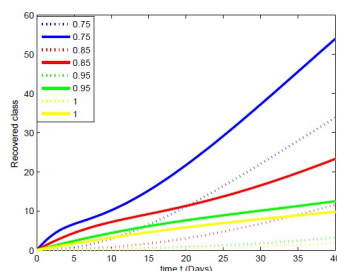
شکل ۱: مدل؟؟ در حالت کلاسیک ($\alpha = 1$) و با تمام بخشها

۶. نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک مدل ریاضی کسری SEIR برای بررسی اثرات فاصله‌گذاریهای اجتماعی بر کنترل گسترش ویروس کووید-۱۹ ارائه گردید. دو کنترل بر روی جمعیت، شامل آموزش رسانه‌ای و قرنطینه شدن (در منزل ماندن) افراد در مدل اعمال گردید. شکل کلی مسئله کنترل بهینه مرتبه کسری و شرایط بهینگی متناظر با آن، به منظور حداقل کردن تعداد افراد مستعد ابتلا و آلوده و حداکثر کردن تعداد بهبودیافتگان مورد بررسی قرار



شکل ۲: جمعیت مستعد ابتلا (S) با و بدون اعمال کنترل ها شکل ۳: جمعیت افراد در معرض ابتلا (E) با و بدون اعمال کنترل ها



شکل ۴: جمعیت افراد آلوده (I) با و بدون اعمال کنترل ها شکل ۵: جمعیت افراد بهبود یافته (R) با و بدون اعمال کنترل ها

گرفت. شرایط بهینه لازم برای یک مسئله کنترل بهینه کسری کلی با مشتق کاپوتو مورد بحث قرار داده شد. با استفاده از مدل کسری اصل ماگزیم پونتریاگین، سطوح بهینه کنترل‌های پیشنهادی را مشخص گردید.

مراجع

- [1] Agarwal, R.P., Baleanu, D., Nieto, J.J., Torres, D.F.M., Zhou, Y. *A survey on fuzzy fractional differential and optimal control nonlocal evolution equations*, J. Comput. Appl. Math. (2018), 339, 3–29.
- [2] Almeida, R., Pooseh, S., Torres, D.F.M. *Computational methods in the fractional calculus of variations*, Imperial College Press, London (2015).
- [3] Chowell, G., Blumberg, S., Simonsen, L., Miller, M.A., Viboud, C. *Synthesizing data and models for the spread of MERS-CoV, 2013: key role of index cases and hospital transmission*, Epidemics. Dec; 9: , (2014), 40-51.
- [4] Cook, S., Conrad, C., Fowlkes, A. L., Mohebbi, M. H. *Assessing google flu trends performance in the United States during the 2009 influenza virus A (H1N1) pandemic*, PLoS One 6 (8), (2011), e23610.
- [5] Dahl, E., *Coronavirus (Covid-19) outbreak on the cruise ship Diamond Princess.*, Int. Marit. Health, 71 (1), (2020), 5–8.
- [6] Diaz, P., Constantine, P., Kalmbach, K., Jones, E., Pankavich, S. *A modified SEIR model for the spread of Ebola in Western Africa and metrics for resource allocation*, Appl. Math. Comput. 324, (2018), 141–155.
- [7] Diethelm, K., Ford, N.J., Freed, A.D. *A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations*, Nonlinear Dyn., 29(2002), 3–22.
- [8] Pastor M. *Discretization Techniques for Transient, Dynamic and Cyclic Problems in Geotechnical Engineering: First Order Hyperbolic Partial Differential Equations.*, In: Di Prisco C., Wood D.M. (eds) Mechanical Behaviour of Soils Under Environmentally Induced Cyclic Loads. CISM Courses and Lectures, vol 534. Springer, Vienna(2012).

- [9] Prem, K., Liu, Y., Russell, T.W., Kucharski, A.J., Eggo, R.M., Davies, N. S., *The effect of control strategies to reduce social mixing on outcomes of the COVID-19 epidemic in Wuhan, China: A modeling study*, Lancet Public Health, 5 (5) (2020), 261–270.
- [10] Saito, M.M., Imoto, S., Yamaguchi, R., Sato, H., Nakada, H., Kami, M. *Extension and verification of the SEIR model on the 2009 influenza A (H1N1) pandemic in Japan*, Math Biosci 246 (1), (2013), 47–54.
- [11] Thevarajan, I., Nguyen, T. H. O., Koutsakos, M., Druce, J., Caly, L., van de Sandt, C.E. *Breadth of concomitant immune responses prior to patient recovery: A case report of non-severe COVID-19*, Nat. Med., 26 (4), (2020), 453–455.
- [12] Zhang, Z. *A novel COVID-19 mathematical model with fractional derivatives: Singular and nonsingular kernels*, Chaos Solitons Fractals, 139, (2020), 110060.

Investigation of a SEIR Fractional Mathematical Model for Covid-19 Disease Control

Mahmood Dadkhah ^{*1}, Nazli Besharati ²

¹ Department of Mathematics, PayameNoor university, Tehran, Iran

² Department of Mathematics, PayameNoor university, Tehran, Iran

m_dadkhah@pnu.ac.ir

Abstract— In this paper, a SEIR fractional mathematical model is presented to investigate the effects of social distances on controlling the spread of the Covid-19 virus. Two controls will be considered in this model: the first control of media education, through efforts that explain the importance of social distance, the use of face masks, etc, to the public, and the second control of quarantine (staying at home) of the exposed individuals. The general form of the fractional optimal control problem and the corresponding optimization conditions are examined in order to minimize the number of susceptible and infected people and maximize the number of recoveries.

Keywords—Covid-19, Fractional Calculus, Caputo Derivative, Optimal Control.