

هامیلتونی بوز-هابارد با برهم کنش دو وسه جسمی

حمیده رحمتی^۱، انوشه لطیفی^۲

^۱ دانشگاه صنعتی قم، hrahmati1357@yahoo.com

^۲ دانشگاه صنعتی قم، latifi@qut.ac.ir

چکیده

موج سیستم از بوزونهای بسیار سرد و یک شبکه اپتیکی سه بعدی
تایید شده است [۸].

اما با در نظر گرفتن ساختار سیگارمانندی برای بوزون های شبکه
و در دماهای بسیار پایین برهم کنش عکس مجذوری دوقطبی ها
تقویت می شود و برهم کنش دافعه یا جاذبه ای قابل اغماض خواهد
بود [۷]. در مرجع [۸] نشان داده شده است که در این حالت برهم
کنش عکس مجذور مثلثاتی دو جسمی بین دوقطبی ها وجود دارد.
در این جا نشان داده ایم که سهم موثر حاصل از برهم کنش سه تایی
بوزون ها نیز باید در محاسبات مد نظر قرار گیرد که باعث می شود به
پتانسیل مشهور کالوجرو-ساترلند-ولف برسیم.

مدل کالوجرو-ساترلند-ولف مسأله بس ذره ای کوانتومی و حل
پذیری است که با مسائل فیزیکی مختلف مانند اثر هال کوانتومی [۹]،
یانگ-میلز ۴ بعدی [۱۰]، انتشارگر امواج سالیوتونی [۱۱]، سیاه
چاله ها [۱۲] و برهم کنش بوزون ها در حالت چگالش بوز-اینشتین
(BEC) [۸] ارتباط دارد.

هامیلتونی بوز-هابارد یکی از مباحث مهم در زمینه اپتیک کوانتومی
است که در شبکه های نوری کاربرد دارد. در این مقاله با در نظر
گرفتن هندسه ای خاص برای یک سیستم بوزونی نشان داده شده
است که برهم کنش موثر شبکه از نوع کالوجرو-ساترلند-ولف خواهد
بود که از نوع عکس مجذور فاصله و مثلثاتی است. این نتیجه باعث
می شود در شرایط مختلف با دقت بیشتری مساله را مورد نظر قرار
داد. این نتایج در اتم روبیدیم به لحاظ آزمایشگاهی تایید شده است.
حالت خاصی از سه بوزون با برهم کنش دوتایی مثلثاتی نیز به طور
کامل مورد تحلیل قرار گرفته که نشان می دهد ذرات در چه مناطقی
از حلقه اپتیکی قرار بگیرند تا سیستمی پایدار داشته باشیم.

واژه های کلیدی

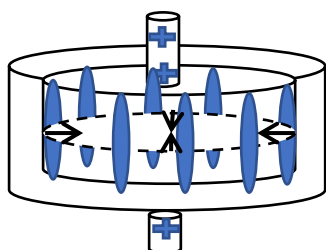
هامیلتونی بوز-هابارد، شبکه اپتیکی، دوقطبی، هامیلتونی کالوجرو-
ساترلند-ولف، چگالی احتمال.

مقدمه

مدلی تک بانندی از هامیلتونی بوز-هابارد با برهم کنش دو تایی

و سه تایی

با استفاده از مدل مطرح شده در شکل ۱ [۸] مساله ای چند بانندی
داریم:



شکل ۱: بوزون های محدود شده و سیگاری شکل (آبی) در یک
استوانه و دوقطبی های الکتریکی (فلش)

فرض می کنیم اتم های شبکه در جهت افقی ارتعاشی ندارند و
مقیاس انرژی شبکه بین انرژی اپتیکی $\hbar\omega_p$ و انرژی نوسانی آن ها
در جهت عمودی است: $\hbar\omega_y \leq K_B T \leq \hbar\omega_p$. برای اتم
های قطبیده در این سیستم علاوه بر این که برهم کنش کوتاه برد و

آزمایش هایی که با سیستم های بوزونی در گذارهای فازی انجام
شد انگیزه ای بود تا مطالعات جدیدی در زمینه مدل بوز-هابارد آغاز
شود [۱]. نتایج حاصل از این آزمایش ها یک سیستم بوزونی را در یک
شبکه با برهم کنش دو جسمی تایید می کرد و بسیار مورد توجه قرار
گرفت [۲و۳و۴].

در حالت چگالش بوز-اینشتین اتم ها در حالت یکسان و در یک
تله دوقطبی اپتیکی کنار هم قرار دارند. این تله دوقطبی اتم ها را
مقید می کند تا در کنار هم بمانند. با استفاده از نوفه های لیزری
شبکه ای نوری ساخته می شود که شبیه ساختار بلوری اتم ها رفتار
می کند. در دماهای پایین اتم ها در پایین ترین سطح انرژی داخلی
اشان در این شبکه هستند و مدل بوز-هابارد توصیفی از بوزون های
بدون چرخش و اسپین را بر روی شبکه آن ها مطرح می کند که
علاوه بر این که برهم کنش دافعه یا جاذبه ای دارند دوقطبی های آن
هم برهم کنش ناچیزی با یکدیگر دارند.

اخیرا در مرجع [۵] اهمیت در نظر گرفتن برهم کنش های بیشتر
از دو جسم را مورد توجه قرار دادند که با مشاهدات حاصل از تابع

$$V_{d-two} \sim \sum_{i < j} \frac{\pi^2 g_v}{L_x^2 \sin^2(\frac{\pi x_{ij}}{L_x})} + O(\frac{1}{R_y^2}) \quad (6)$$

و برای سه جسم:

$$V_{d-three} \sim \sum_{i < j < k} \frac{\pi^2 g_\mu}{L_x^2 \sin^2(\frac{\pi y_{ij}}{L_x})} + O(\frac{1}{R_y^2}) \quad (7)$$

اکنون شبکه ای تک بعدی داریم که برهم کنش عکس مجذور فاصله و مثلثاتی میان بوزون های روی شبکه آن وجود دارد. در نهایت با حذف تصحیح های این دو پتانسیل، هامیلتونی شبکه عبارتست از:

$$H = \sum_{i=1}^N \delta_N \left(-\frac{\hbar^2}{2m_R} \frac{d^2}{dx_i^2} + \frac{m_R \omega_R^2}{2} x_i^2 \right) + \sum_{i < j} \frac{\pi^2 g_v}{L_x^2 \sin^2(\frac{\pi x_{ij}}{L_x})} + \sum_{i < j < k} \frac{\pi^2 g_\mu}{L_x^2 \sin^2(\frac{\pi y_{ij}}{L_x})} \quad (8)$$

که ω_R فرکانس دوقطبی ها و m_R جرم بوزون های شبکه را نشان می دهند. این رابطه هامیلتونی معروف کالوجرو-ساترلند-ولف را نشان می دهد [۱۵]. حل کامل این هامیلتونی در حالت ۳ ذره فرمیونی در [۱۶] ارائه شده است. در نمایش تابع موج این هامیلتونی از تابع ریاضی جک $J_a^b(x)$ استفاده می شود که ویژگی های مخصوصی دارد و برای بوزون ها و فرمیون ها شکل متفاوتی به خود می گیرد [۱۷]. بعنوان یک کاربرد حالتی را بررسی می کنیم که سه بوزون با برهم کنش دوتایی داریم ولی ابتدا تابع جک را معرفی می کنیم.

چندجمله ای های جک و پارتیشن

پارتیشن λ دنباله ای صعودی از اعداد صحیح و مثبت است:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N, 1 \leq i \leq N \quad (9)$$

پارتیشن λ با جدول های یانگ نمایش داده می شوند و متناظر با یک چندجمله ای با تمام جایگشت های کامل هستند. به طور مثال در سیستمی با سه ذره بوزونی و پارتیشن $\lambda = (3,0,0)$:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{array}$$

شکل ۲. پارتیشن مربوط به $\lambda = (2,1,0)$

و چندجمله ای آن به این شکل در می آید:

$$m_\lambda(x, y, z) = x^2 y^1 + y^2 x^1 + x^2 z^1 + y^2 z^1 + z^2 y^1 + z^2 x^1 \quad (10)$$

و در نتیجه چندجمله ای های جک به صورت زیر تعریف می شوند [۱۸]:

$$J(z)_\lambda^\alpha = \sum_{\mu \leq \lambda} v_{\mu\lambda} m_\mu(z) \quad (11)$$

دافعه یا جاذبه ای بوزون ها U_0 را داریم برهم کنش دوقطبی - دوقطبی آن ها را نیز داریم:

$$V_d = V_{d-two} + V_{d-three} = g_v \frac{\bar{a}_i \bar{a}_i - 3(\bar{a}_i \bar{R}_{ij})(\bar{a}_i \bar{R}_{ij})}{R_{ij}^3} + g_\mu \frac{\bar{D}_{ij} \bar{D}_{jk} - 3(\bar{D}_{ij} \bar{R}_{ijk})(\bar{D}_{jk} \bar{R}_{ijk})}{R_{ijk}^3} \quad (12)$$

که $\bar{R}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ فاصله نسبی میان گشتاورهای دوقطبی را نشان می دهد که برهم کنش آن ها دوجسمی است و $\bar{R}_{ijk} = \vec{r}_{ij} - \vec{r}_{jk}$ فاصله نسبی میان گشتاورهای دوقطبی با برهم کنش سه تایی را نشان می دهد. همچنین g_μ و g_v ضریب برهم کنش دوجسمی و سه جسمی دو قطبی هاست. فرض می شود که دو قطبی ها روی خط راست و به ترتیب قرار دارند. اکنون مدل بوز-هابارد با برهم کنش دو و سه تایی [۱۳] به صورت زیر در می آید:

$$H = -t \sum_{i=1}^N a_i^\dagger a_j + \frac{U_0(R)}{2} \sum \delta_{n_i} (\delta_{n_i} - 1) + \sum_{i < j} U_{d,ij} \delta_{n_i} \delta_{n_j} + \frac{U'_0(R)}{6} \sum \delta_{n_{ij}} (\delta_{n_{ij}} - 1) (\delta_{n_{ij}} - 2) + \sum_{i < j < k} U_{d,ijk} \delta_{n_{ij}} \delta_{n_{jk}} \quad (13)$$

که $\delta_{n_{ij}} = a_i^\dagger a_i - a_j^\dagger a_j - 2N_0$ و $\delta_{n_i} = a_i^\dagger a_i - N_0$ انحراف تعداد اتم ها از میانگین تعدادشان در هر مکان شبکه است و t دامنه پرش تا نزدیک ترین همسایگی ذرات را نشان می دهد. توابع $U_0(R)$ و $U'_0(R)$ پتانسیل دافعه یا جاذبه بوزون ها را نشان می دهند. در مدل سیگار مانند شکل ۱ تابع موج به صورت حاصل ضرب تابع موج حالت پایه در جهت افقی x و عمودی y در نظر گرفته می شود. فرض می کنیم چگالش سیستم بوزونی در جهت y ها R_y خیلی بزرگ تر از ابعاد شبکه L_x باشد: $R_y \gg L_x$ که در این صورت مساله چند باندی به تک باندی تبدیل می شود و تابع موج به شکل زیر در می آید:

$$\psi(r) = [\sum_{i=1}^N a_i w(x - x_i) + \sum_{i \neq j} a_{ij} w(x - x_{ij})] \psi_0(y) \quad (14)$$

که a_i متناظر با عملگر نابودی است و $a_{ij} = a_i - a_j$ و $w(x)$ تابع موج وانیر شبکه را نشان می دهد [۱۴]. همچنین در این حالت دو جمله $U_0(R)$ و $U'_0(R)$ قابل چشمپوشی هستند [۱۷] و در نتیجه برهم کنش سیستم مربوط به دوقطبی ها خواهد شد. برای برهم کنش دوجسمی داریم:

$$U_{d,ij} = \int d\vec{r} d\vec{r}' |w(x - x_i)|^2 |w(x' - x_j)|^2 V_{d-two} |\psi_0(y)|^2 |\psi_0(y')|^2 \quad (15)$$

و برای برهم کنش سه تایی:

$$U_{d,ijk} = \int d\vec{r} d\vec{r}' |w(x - x_{jk})|^2 |w(x' - x_{ki})|^2 V_{d-three} |\psi_0(y)|^2 |\psi_0(y')|^2 \quad (16)$$

در چنین شرایطی می توان احتمال توزیع حالت پایه را به صورت چگالی تعداد اتم ها در راستای محور عمودی نشان داد: $|\psi_0(y)|^2 \sim \frac{N_0}{R_y}$. بنابراین پتانسیل سیستم برای دو جسم به این شکل خواهد شد:

$$|\psi_{rel}|^2 = 4^{1+\nu} \begin{bmatrix} 2 \cos 6a(x_{12}) + \\ 2 \cos 6a(x_{23}) + \\ 2 \cos 6a(x_{31}) \end{bmatrix} \times$$

$$\left[\frac{\sin 2a(x_{12}) + \sin 2a(x_{23})}{\sin 2a(x_{31})} + 1 \right]^{2(\nu)} \quad (9)$$

چگالی احتمال برابر حاصلضرب دو جمله است اکنون با صفر قرار دادن آن برای هر جمله پاسخ هایی داریم. در بخش سینوسی با استفاده از روابط مثلثاتی رابطه (9) به حاصل ضرب سه سینوس تبدیل می شود:

$$\sin 2a(x_{12}) \sin 2a(x_{23}) \sin 2a(x_{31}) = 0$$

که نتیجه می دهد دو تا از بوزون ها باهم زاویه ای 90 درجه می سازند بدون اینکه مکان ذره سوم اهمیتی داشته باشد.

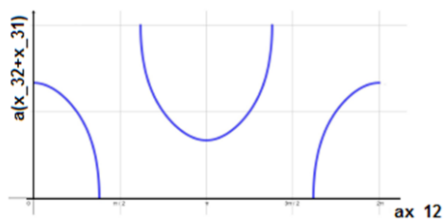
اگر بخش کسینوسی را کمی ساده کنیم و برابر صفر قرار دهیم:

$$2 \cos a(x_{12}) + \cos a(x_{32} + x_{31}) \cos 2ax_{12} = 0$$

که نتیجه می دهد:

$$a(x_{32} + x_{31}) = \cos^{-1} \left(\frac{-\cos 2ax_{12}}{2 \cos a(x_{12})} \right)$$

این رابطه صفر نمی شود و اگر نمودار $a(x_{32} + x_{31})$ را برحسب ax_{12} رسم کنیم:



شکل 4. پاسخ معادله (10) که نشان می دهد در دو ناحیه اطراف $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ حالت ممنوعی وجود ندارد.

با توجه به شکل نتیجه می گیریم که در دو ناحیه اطراف $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ ذرات حضور دارند و تابع موج صفر نمی شود.

نتیجه گیری و جمع بندی

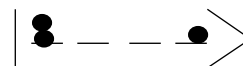
در آزمایش ها بی که با اتم روبیدیم در یک شبکه اپتیکی انجام شده است پی برده شد که برهم کنش چندجسمی در این سیستم حضور دارد [19]. در واقع تفسیر حاصل از در نظر گرفتن برهم کنش سه جسمی این است که باید با تغییر هندسه مساله توجه داشته باشیم که شرایط مساله عوض می شود و مدارهای بالاتر شبکه بوزونی در برهم کنش ها دخالت دارند.

در مدل بوز-هابارد معمولی جمله برهم کنش دو جسمی بعنوان پتانسیل موثر در نظر گرفته می شود و تصحیح ناشی از برهم کنش

که α ضریب برهم کنش ذرات و $\nu_{\mu\lambda}$ ضریب بهنجارش است. این چندجمله ای پاسخ عملگر دیفرانسیلی لاپلاس-بلترامی است:

$$H_{LB} = \sum_{j=1}^N (z_j \frac{\partial}{\partial z_j})^2 + \frac{1}{a} \sum_{1 \leq j \leq k} \frac{z_j + z_j}{z_j - z_j} (z_j \frac{\partial}{\partial z_j} - z_j \frac{\partial}{\partial z_j}) \quad (5)$$

نمایش پارتیشن ها در فضای فوک هم انجام می شود به این صورت که هر پارتیشن تعداد اعداد اشغال را نشان می دهد. به طور مثال برای سه بوزون پارتیشن $\lambda = (3,0,0)$ داریم:



شکل 3. نمایش فوک پارتیشن $\lambda = (3,1,0)$

هامیلتونی سه بوزون با برهم کنش دوتایی

برای سه بوزون که بر روی شبکه ای اپتیکی با برهمکنش دو جسمی کالوجرو-ساترلند قرار دارند هامیلتونی عبارتست از:

$$H = \frac{-\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^3 \partial_{x_i}^2 + \frac{\hbar^2}{m} a^2 g_{\nu} \sum_{i < j}^3 \frac{1}{\sin^2(a(x_i - x_j))} \quad (6)$$

که $g_{\nu} = \nu(\nu - 1)$ ثابت جفت شدگی بر همکنش دو جسمی است. مشابه روش مرجع [16] با انجام یک تبدیل پیمانه ای و استفاده از متغیر $z_j = \exp[2iax_j]$ به عملگر لاپلاس-بلترامی این هامیلتونی می رسمیم. در نتیجه تابع موج این سیستم عبارتست از:

$$\psi(z_j) = J_{[3,0,0]}^{(\nu-1)}(z_1, z_2, z_3) (z_1 z_2 z_3)^{q-2(\nu)} \times \prod_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^3 (z_j - z_k)^{(\nu)} \quad (7)$$

که $J_a^b(z)$ چندجمله ای های جک هستند و q عددی مثبت است که جایگیری ذرات را روی قسمت های مختلف شبکه اپتیکی نشان می دهد [17]. با جاگذاری (7) در (6) انرژی سیستم عبارتست از:

$$E = 4a^2 [2\nu^2 + 9\nu + 9] \quad (8)$$

حالت های ممنوع سه بوزون با برهم کنش سه تایی کامل

با استفاده از چگالی احتمال ذرات می توان به دو موضوع پی برد؛ اول این که از صفر قرار دادن آن حالت های ممنوع سیستم درمی آید و دوم این که احتمال حضور و وابستگی ذرات به هم مشخص می شود. بنابراین با جاگذاری متغیرهای z_j در تابع موج (7) چگالی احتمال عبارتست از:

ultracold atomic systems”, *Phys. Rev. Lett.* 104 167210(2010).

[7] D. van Oosten, P. van der and H. T. C. Stoof, “Mott insulators in an optical lattice with high filling factors”, *Phys. Rev. A* 67 033606 (2003).

[8] Y. Yu, Z. Luo and Z. Wang, “Effects of dipole-dipole interaction between cigar-shaped BECs of cold alkali atoms: towards inverse-squared interactions”, *J. Phys.: Condens. Matter* 26 (2014).

[9] B.A. Bernevig, F.D.M. Haldane, “Properties of non-Abelian fractional quantum Hall states at filling $= \frac{k}{r}$ ”, *Phys. Rev. Lett.* 101 (2008).

[10] N.A. Nekrasov, Seiberg-Witten, “prepotential from instanton counting”, *Adv. Theor. Math. Phys.* 7, 831-864 (2003).

[11] H. H. Chen *et al.*, “Algebraic internal wave solitons and the integrable Calogero-Moser-Sutherland N-body problem”, *Phys. Fluids* 22, 187 (1979).

[12] G. Gibbons, P. Townsend, “Black holes and Calogero models”, *Physics Letters B* 454, 187-192. (1999).

[13] F. Hincapie-Fa, R. Franco, J. Silva-Valencia, “Spin-1 Bose-Hubbard model with two- and three-body interactions”, *Physics Letters A*, 382,26 (2018).

[14] G. H. Wannier, “The structure of electronic excitation levels in insulating crystals”, *Phy. Rev.* 52, 191 (1937).

[15] M. Rosenbaum, A. Turbinger and A. Capella, “Solvability of the G2 Integrable System”, *Intern.Journ.Mod.Phys. A13*, 3885-3904 (1998).

[16] H. Rahmati, A. Latifi, “Exact energy of the two and three-body interactions in the trigonometric three-body problem via Jack polynomials”, *J. Few-Body Systems* 60,(2019).

[17] R. P. Stanley, “Some combinatorial properties of Jack symmetric functions”, *Adv. Math.* 77, 76-115 (1989).

[18] F. Lesage, V. Pasquier, D. Serban, “Dynamical correlation functions in the Calogero-Sutherland model”, *Nuclear Physics B* 435 (1995).

[19] T. Sowinski, R. W. Chhajlany, O. Dutta, L. Tagliacozzo and M. Lewenstein, “Criticality in the Bose-Hubbard model with three-body repulsion”, *Physical Review A* 92 (4), 043615 (2015).

سه جسمی به آن اضافه می شود. اما نتایج حاصل از آزمایش هایی که با اتم روبیدیم انجام شده است تاییدی بر این مطلب است که باید برهم کنش های سه جسمی به طور جدی مد نظر قرار گیرند و تنها نقش تصحیح ندارند. در این صورت پتانسیل موثر در سیستم به شکل پتانسیل مشهور کالوجرو-ساترلند-ولف تبدیل می شود.

از سوی دیگر، مسائل بس ذره ای جایگاه ویژه ای در فیزیک دارند. پتانسیل کالوجرو-ساترلند-ولف در یک سیستم بس ذره ای بوزونی اعمال می شود قابلیت کاربرد در سیستمی با سه بوزون را بر روی شبکه ای اپتیکی دارد. بنابراین می توان در این حالت با در نظر گرفتن برهم کنش دوتایی و سه تایی سه بوزون هامیلتونی سیستم را نوشت و ویژه توابع آن را با چندجمله ای های جک بدست آورد. سپس با جاگذاری تابع موج، ویژه مقدار انرژی این سیستم را هم بدست آورد [۱۶].

با استفاده از محاسبه تابع چگالی احتمال پی بردیم در سیستمی متشکل از سه ذره بوزونی یکسان در یک شبکه اپتیکی با برهم کنش کالوجرو-ساترلند در دو ناحیه اطراف $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ حالت ممنوعی وجود ندارد و بوزون های روی شبکه اپتیکی را می توان در این مناطق قرار داد که سیستم پایدار بماند.

مراجع و منابع

[1] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hansch, and I. Bloch, “Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms”, *Nature* 415, 39 (2002).

[2] D. Jaksch and P. Zoller, “The cold atom Hubbard toolbox”, *Ann. Phys.* 52 315 (2005).

[3] A. Micheli, G. K. Brennen and P. Zoller, “A toolbox for lattice-spin models with polar molecules”, *Nature Phys.* 2 341(2006).

[4] H. Weimer, M. Markus, I. Lesanovsky, P. Zoller and H. P. Bchler, “A Rydberg Quantum Simulator”, *Nature Phys.* 6 382 (2010).

[5] N.L. Harshman and A.C. Knapp, “Anyons from Three-Body Hard-Core Interactions in One Dimension”, *Annals of Physics* 412 168003,(2020).

[6] V. G. Rousseau, G. G. Batrouni, D. E. Sheehy, J. Moreno and M. Jarrell, “Pure Mott phases in confined