# تاثیر زمان سنجش بر حساسیت حسگرهای کوانتومی بر اساس معادلات هامیلتونی

# بنت الهدی امانت1

# 1 استادیار ، گروه فیزیک، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

چکیده

حسگر کوانتومی، یک دستگاه کوانتومی است که به محرک وارد شده به آن پاسخ می دهد. معمولاً این به حسگرهایی اطلاق می شود كه دارای سطح انرژی کمی هستند. مهمترین مزیت آنها عملکرد در نانو مقیاس هایی است که در دسترس حسگرهای کلاسیک نیستند. در این مقاله پس از مرور کوتاه بر اصول یک حسگر کوانتومی، معادلات هامیلونی حاکم بر حسگر را بیان می کنیم و درنهایت با توجه به عوامل موثر بر بهینه سازی حساسیت یک حسگر کوانتومی با توجه بر روابط حاکم بر آن و از دیدگاه مدت زمان سنجش، بررسی و ارائه شده است. نشان داده شد که افزایش زمان تا مقدار مشخصی تاثیر زیادی در بهبود حساسیت دارد اما پس از آن نه تنها تاثیر چندانی در میزان حساسیت حسگر ندارد بلکه باعث کاهش SNR می‌گردد. لذا با توجه به نمودارها و نتایج حاصله مقدار بهینه سنجش بدست آمده است.

واژه های کلیدی

معادلات هامیلتونی، حسگر کوانتومی، حساسیت

مقدمه

علم اطلاعات کوانتومی، مبانی فکری نظریه‌های مکانیک کوانتومی و علم اطلاعات را، با تکیه بر مکانیک کوانتومی، ریاضیات، علوم کامپیوتر، علوم فیزیکی و مهندسی، با هم ترکیب می‌کند. سنجش کوانتومی را می توان برای درک ترکیبات بی سابقه ای از محدوده، وضوح و حساسیت برای اندازه گیری پارامترهای حیاتی مورد علاقه استفاده کرد. داده‌های دستگاه‌های حسگر با حساسیت و قابلیت اطمینان بالا که قادر به تشخیص علائم اولیه خرابی تجهیزات هستند را می‌توان با استفاده از مدل‌های پیش‌بینی‌کننده تجزیه و تحلیل کرد تا بینشی در مورد عملکرد آینده به دست آورد و وضعیت سلامت عملیاتی را با درجه اطمینان بالاتری ارزیابی کرد[1]. یک حسگر کوانتومی یک دستگاه کوانتومی است که به یک محرک پاسخ می دهد. معمولاً این به حسگرهایی اطلاق می شود كه دارای سطح انرژی کمی هستند ، از انسجام كوانتومی برای اندازه گیری مقدار فیزیکی استفاده می كنند ، یا از درهم تنیدگی برای بهبود اندازه گیری های فراتر از آنچه كه با حسگرهای كلاسیك انجام می شود استفاده می كنند. حسگر کوانتومی دارای چهار ویژگی اساسی هستند. این حسگر دارای سطح انرژی گسسته و قابل حل می باشند، می توانید حسگر را روشن کنید و عملیات خواندن را انجام دهید (روشن و خاموش کنید)، می توانید حسگر را بطور پیوسته کنترل کنید و در نهایت این حسگرها با یک مقدار فیزیکی در تعامل است و نسبت به آن کمیت واکنش مناسب و قابل قبولی نشان می دهد.

به جرات می توان گفت که سنجش کوانتومی یک تکنولوژیست که می تواند جهان ما را دگرگون کند و در حال حاضر از اهمیت بسیار بالایی در جهان برخوردارند بطوری که کشورهای پیشرفته سرمایه گذاری های هنگفتی در این زمینه نموده اند. سنجش کوانتومی به طور معمول دراستفاده از در هم تنیدگی کوانتومی برای بهبود حساسیت یا دقت اندازه گیری ، فراتر از آنچه ممکن است به صورت کلاسیک باشد. مهمترین مزیت آنها عملکرد در نانو مقیاس هایی است که در دسترس حسگرهای کلاسیک نیستند[2] [3] [4].

مهندسی هامیلتونی، تکنیک های کنترل کلاسیک را بر روی سیستم های کوانتومی برای دستیابی به حالت، فرآیند یا رفتار قابل مشاهده دلخواه توصیف می کند. این شامل جداسازی برای حذف یا کاهش فعل و انفعالات ناخواسته، کنترل بهینه با استفاده از بهینه‌سازی عددی برای به حداکثر رساندن پایداری عملیات محاسباتی کوانتومی با توجه به محدودیت‌های تجربی و شبیه‌سازی هامیلتونی مدل‌ها برای کاوش کوانتومی است[5].

 در این مقاله ابتدا به بررسی برخی از اصول اساسی برای سنجش کوانتومی را بیان می کنیم و سپس به ذکر معیارهای ابتدایی برای یک سیستم کوانتومی , و معادلات هامیلتونی حاکم بر یک سنجنده سنج را ارائه می دهیم و در نهایت روابط حاکم بر حساسیت یک حسگر کوانتومی را بدست آورده و عوامل موثر بر بهینه سازی حساسیت را با توجه به رابطه حاصله مشخص می نماییم.

حسگرهای کوانتومی

سه معیار اصلی خصوصیات یک حسگر کوانتومی به این صورت می باشد که: 1-سیستم کوانتومی دارای سطح انرژی گسسته و قابل قبول است. به طور خاص ، ما فرض خواهیم کرد که یک سیستم دو سطح (یا مجموعه ای از سیستم های دو سطح) با یک سطح انرژی کمتر │0> و یک سطح انرژی بالاتر │1> است که با یک انرژی گذار (E=Ћω0) از هم جدا می شوند (شکل 1). 2-امکان آماده‌سازی سیستم کوانتومی به یک حالت شناخته‌شده و خواندن حالتش باید امکان پذیر باشد. 3- سیستم کوانتومی بطور همدوس توسط میدان های وابسته به زمان قابل دستکاری است. این شرایط برای کلیه پروتکل ها به شدت لازم نیست. اندازه گیری طیف سنجی موج مداوم یا اندازه گیری میزان سرعت نمونه هایی هستند که خارج از این معیار قرار می گیرند[6].



شکل 1: ویژگی های اساسی سیستم کوانتومی دو حالته. سنجش کوانتومی در پاسخ به یک سیگنال خارجی از تغییر در فرکانس انتقال ω0 یا نرخ انتقال Γ، در پاسخ به یک سیگنال خارجی V استفاده می کند.

در ادامه ما رابطه کلی هامیلتونی برای حسگر کوانتومی توصیف می کنیم:

$H\left(t\right)=H\_{0}+HV\left(t\right)+H\_{control}(t)$ (1)

بطوری که در این رابطه H0 مقدار هامیلتونی مستقل از زمان می باشد اولیه، HV(t) هامیلتونی منتسب بهV(t) یا همان سیگنال هامیلتونی و Hcontrol(t) هامیلتونی کنترل می باشد. H0 که در حالتی که هیچ سیگنالی وجود ندارد این مقدار به عنوان مقدار اولیه در نظر گرفته می شود. ویژه حالتهای انرژی هامیلتون اولیه |0> و |1> می باشد.

$H\_{0}=E\_{0}\left|0><0\right|+E\_{1}\left|1><1\right|$(2)

 بطوریکه E0 وE1 ویژه مقادیر می باشد و ω0=E1-E0 گذار انرژی بین حالتها می باشد[7].

سیگنال هامیلتونی HV(t) بیانگر رابطه بین کوبیت حسگر و سیگنال V (t) است که باید اندازه گیری شود. هنگامی که سیگنال ضعیف است (که در اینجا اینگونه فرض می شود) HV(t) یک اختلال کوچک به H0 اضافه می کند. سیگنال هامیلتونی را می تواند به کمک دو کمیت کیفی موازی و عمودی به شکل زیر توصیف کرد:

$HV\left(t\right)=HV\_{∥}\left(t\right)+HV\_{⊥}(t)$ (3)

قسمت مهمی ازسیگنالها، سیگنال برداری v(t) می باشد که در عمل توسط میدان های الکتریکی و مغناطیسی ایجاد می شود که رابطه بین سیگنال برداری v(t)={vx,vy,vz}(t) و کوبیت بوسیله سیگنال هامیلتونی به شکل زیر توصیف می شود:

$HV\left(t\right)=γV\left(t\right).σ$ (4)

بطوریکه σ = {σx, σy, σz} یک بردار ماتریس پائولی می باشد. برای یک سیگنال برداری دو معادله سیگنال V||(t) و V⊥ (t) به شکل زیر بیان می شود:

$V\_{∥}\left(t\right)=V\_{z}\left(t\right) V\_{⊥}\left(t\right)=V\_{x}\left(t\right)+iV\_{y}(t)$ (5)

در نتیجه هامیلتونی سیگنال بصورت زیر می باشد :

$HV\left(t\right)=γRe[V\_{⊥}\left(t\right)]σ\_{x}+γIm\left[V\_{⊥}\left(t\right)\right]σ\_{y}+γV\_{∥}(t)σ\_{z}$(6)

برای اکثر پروتکل های سنجش کوانتومی ، لازم است که کوبیت قبل ، در حین و بعد از فرآیند سنجش بصورت کنترل شده تغییر کند. این امر از طریق یک هامیلتونی کنترل Hcontrol (t) امکان پذیر است که امکان اجرای مجموعه ای استاندارد از دروازه های کوانتومی را فراهم می آورد.

حساسیت

یکی از ویژگی های مهم ، حساسیت ذاتی یک حسگر کوانتومی است. از یک طرف ، انتظار می رود یک حسگر کوانتومی یک واکنش قوی به سیگنال های مطلوب و مورد نظر ارائه دهد ، در حالی که از طرف دیگر ، باید کمترین تاثیرپذیری را نسبت به نویز و سیگنال های ناخواسته داشته باشد، که این الزامات تاحدودی با هم متناقض است. سطح حساسیت بی سابقه ای که توسط بسیاری از حسگرهای کوانتومی ارائه شده است ، یک نیروی محرک اصلی در این زمینه است که باعث شده پژوهشگران و محققان توجه وِیژه ای به این زمینه نمایند[8].

بطور تجربی در احتمال آشکارسازی سیگنال ما یک خطای غیر صفر داریم که این خطا خود را در تقریب سیگنال نشان می دهد. برای محاسبه سیگنال به نویز وحساسیت لازم است منابع اصلی نویز در روابط لحاظ گردد که این منابع در روابط به شکل σp نشان داده می شود. مهمترین منابع نویز شامل نویز طرح ریزی شده کوانتومی(σp,quantum) و نویزکلاسیک بازخوانی(σp,readout) می باشد. نویز کلاسیک بازخوانی اغلب با نویز کوانتومی ترکیب می شود و آنها را به شکل زیر نشان می دهند:

$$σ\_{p}^{2}=σ\_{p.quantum}^{2}+σ\_{p.readout}^{2}$$

$≈(1+R^{2})σ\_{p.quantum}^{2}≈\frac{σ\_{p.quantum}^{2}}{C^{2}}=\frac{1}{4C^{2}N}$ (7)

که در روابط فوق R نسبت نویزکلاسیک بازخوانی به نویز کوانتومی می باشد همچنین داریم:

$C=\frac{1}{\sqrt{1+R^{2}}} ≈\frac{1}{\sqrt{1+4k}}$ (8)

که C را می توان به عنوان یک پارامتر سنجش کلی خواندن در نظر گرفت.

نسبت سیگنال به نویز (SNR) (signal-to-noise ratio) برای یک آزمایش سنجش کوانتومی را می توان به شکل زیر تعریف کرد:

$SNR=\frac{P\_{O}}{σ\_{P}}=P\left(t\right)e^{-χ(t)}2C\sqrt{N}$ (9)

که در آن:

$P\_{o}\left(t\right)=P\left(t\right).e^{-χ(t)}$ (10)

با در نظر گرفتن نویز به صورت یک نویز ساکن گوسی P(t) را می توان به شکل معادله (11) نمایش داد.

$P\left(t\right)=\frac{1}{2}(1-e^{-χ(t)}$) (11)

و χ(t)=(Γt) تابع واپاشی است.

حساسیت (Smin) حداقل سیگنالی قابل تشخیص در واحد زمان می باشد. این حساسیت از مساوی واحد قرار دادن SNR برای مدت زمان ادغام یک ثانیه بدست می آید. در نهایت در عمل این حساسیت بطور تقریبی به شکل زیر می باشد:

$S\_{min}=≈\frac{\sqrt{2e}}{γC\sqrt{t\_{χ}}}$ (12)

که tχ زمان واپاشی می باشد که وابسته حسگر است ، C ≤1 یک بازده اندازه گیری ثابت بدون بعد است ، و e عدد اویلر است.

که رابطه فوق یک رابطه بسیار روشن جهت به حداکثر رساندن حساسیت به ما ارائه می کند.



شکل 2 - میزان تغییرات SNR با تغییر زمان نسبت tχ برای توابع واپاشی



شکل 3 - میزان تغییرات Smin با تغییرات زمان سنجش حسگر

شکلهای 2 و 3 میزان تاثیر افزایش t را بر مقدر حساسیت حسگرها نمایش می دهد. همانطور که در شکلهای 2 و 3 مشاهده می شود افزایش t می تواند باعث اثر متفاوت بر روی SNR و Smin شود. با توجه به شکل 3 افزایش زمان تا مقدار مشخصی تاثیر زیادی در بهبود حساسیت دارد اما پس از آن نه تنها تاثیر چندانی در میزان حساسیت حسگر ندارد بلکه باعث کاهش SNR می گردد. لذا با توجه به نمودارها و نتایج حاصله مقدار بهینه برای t تقریبا برابر با tχ می باشد.

**نتیجه گیری**

در مقاله ارائه شده یک رابطه روشن و شفاف جهت حساسیت یک حسگر کوانتومی بدست آمد. می توان نشان داد که حساسیت یک حسگر کوانتومی به شکل رابطه زیر می باشد. که در آن γ پارامتر گذار است. به منظور بهینه سازی حساسیت ، γ باید بزرگ باشد و زمان جابجایی t باید تا حد امکان زیاد شود.

$Sensitivity ∝\left(1/\left(γ\sqrt{\left(t\_{χ}\right)}\right)\right)$ (13)

با توجه به رابطه حاصله مشخص می شود که اولا برای افزایش حساسیت زمان سنجش باید تا حد امکان زیاد باشد. اما ، البته به دلیل اینکه افزایش t منجر به کاهش مقدار χ (t) و در نتیجه این امر باعث کاهش مقدار SNR به صورت نمایی برای t> tχ می شود لذا مناسب ترین زمان جهت سنجش t ≈ tχ می باشد. دوم ، حساسیت را با توجه به tχ می توان بهینه کرد. سرانجام ، حساسیت را می توان اغلب با بهینه سازی اجرای آزمایشی یا استفاده از طرح های کوانتومی پیشرفته ، مانند خواندن منطق کوانتومی ، افزایش داد.

در عمل می توان در محدوده وسیع فرکانسی با استفاده از حسگرهای کوانتومی آنها را به گونه ای تنظیم کرد تا حداکثر حساسیت و دامنه دینامیکی را فراهم کنند و جداسازی انواع مختلف سیگنال ها توسط تقارن یا جهت گیری بردار امکان پذیر باشد. یکی از بزرگترین جاذبه های حسگرهای کوانتومی ، قابلیت فوری آنها برای کاربردهای عملی است. پیشرفت با حسگرهای کوانتومی به دلیل در دسترس بودن مواد بهتر و کنترل دقیق تر امکان پذیر خواهد بود و امکان عملکرد آنها با زمان انسجام طولانی تر ، بازخوانی کارآمدتر و در نتیجه حساسیت بیشتر فراهم می شود.

**مراجع و منابع**

1. S. E. Crawford et al., “Quantum Sensing for Energy Applications: Review and Perspective,” Adv. Quantum Technol., vol. 4, no. 8, p. 2100049 (2021).
2. Pirandola, S. Bardhan, B. R. Gehring, T. Weedbrook, C. and Lloyd S., “Advances in photonic quantum sensing,” Nat Photonics,12, pp 724-733 (2018)
3. Giovannetti, V. Lloyd S. and Maccone L, “Advances in Quantum Metrology”, Nat. Photon, 5(4), pp 222-230 (2011).
4. Goldstein, G. Lukin, M. D. and Cappellaro, P., “Environment-Assisted Precision Measurement,” Phys Rev Letter, 106 (4), 140502 (2010).
5. M. F. O’Keeffe, L. Horesh, J. F. Barry, D. A. Braje, and I. L. Chuang, “Hamiltonian engineering with constrained optimization for quantum sensing and control,” New J. Phys., vol. 21, no. 2, p. 023015, Feb. (2019).
6. Changhun, O. Changhyoup, L. Seok, L. Hyung, L. and Hyunseok, J.,“Optimal distributed quantum sensing using Gaussian states,”Phys Rev Research, 2(2), pp 023030-9 (2020).
7. Nielsen, M. A. and Chuang, I. L., “Quantum computation and quantum information,” Cambridge University Press, Cambridge New York (2000).
8. Campbell, W. C. and Hamilton, P., “Rotation sensing with trapped ions,” Journal of Physics B, 50(6), pp 064002-8 (2017)