

حل کروی و ایستای معادله اینشتین با چشمه یک سیال کامل

بهناز فضل پور^۱

^۱ استادیار، دانشگاه آزاد اسلامی واحد بابل، بابل، b.fazlpour@umz.ac.ir

چکیده

ویژگیهای فیزیکی دسته جدیدی از جوابهای معادلات اینشتین که در آنها یک سیال کامل با معادله حالت $P = -\frac{\rho}{5}$ نقش چشمه را بازی می کند، مورد مطالعه و تحلیل قرار می گیرد. در این رده جوابها سه پارامتر آزاد وجود دارد و آنها توصیف کننده هندسه ای با تقارن کروی و ایستا هستند. مشخص خواهد شد که این جوابها یک فضای فشرده با یک تکینگی برهنه مرکزی را توصیف می نمایند و نشاندهنده یک سیاهچاله یا گلوگاه کرم چاله نیستند.

واژه های کلیدی

جوابهای معادله اینشتین، تقارن کروی، سیاهچاله، سیال کامل

مقدمه

بیش از یک قرن است که ما نسبیت عام و حل شوارزشیلد آنرا که توصیف کننده یک شیئی ایزوله کروی است می شناسیم. در دهه های اخیر، حلهای دیگر معادلات اینشتین کشف شده و خود نظریه نیز دچار چالش شده است.

جستجوی حلهای تحلیلی یک نظریه فیزیکی، جنبه های فیزیکی آن نظریه را روشن نموده و دید فیزیکی ما را بهبود می بخشد. به دست آوردن حلهای دقیق معادلات میدان یک نظریه غیر خطی معمولا دشوار بوده و اغلب با ساده سازی مسئله یعنی با فرض برخی تقارنها میسر می گردد. از سویی دیگر بررسی این جوابهای متقارن به ما اجازه می دهد که بر روی برخی جنبه های فیزیکی متمرکز شویم. این موضوع دقیقا در مورد حل شوارزشیلد اتفاق افتاده و منجر به کشف سیاهچاله ها و به طور غیر مستقیم (از طریق ادغام سیاهچاله ها) منجر به کشف امواج گرانشی شده است. حلهای دارای تقارن کروی نسبیت عام می تواند توصیف کننده سیاهچاله ها، ستاره ها و احتمالا اشیا دیگر باشند.

اخیرا دو خانواده از جوابهای استاتیکی و متقارن کروی معادلات اینشتین در مرجع [۱] پیشنهاد شده است. ماده چشمه در این جوابها یک سیال ایده ال با معادله حالت $\omega = \frac{P}{\rho} = -\frac{1}{5}$ است که در آن ρ و P به ترتیب چگالی انرژی و فشار سیال هستند. بررسی طبیعت فیزیکی این جوابها و دانستن این موضوع که آیا آنها می توانند توصیف

کننده مناطق ستاره ای باشند یا خیر، می تواند حائز اهمیت باشد. البته توجه کنید که معادله حالت $P = -\frac{\rho}{5}$ به وضوح غیر فیزیکی است. زیرا یافتن وضعیت های واقعی که با چنین سیالی توصیف می شوند، دشوار است. اما ستاره های انرژی تاریک گونه و حتی ستاره های انرژی فانتوم گونه در مقالات متعددی مورد مطالعه قرار گرفته اند [۲-۵]. اگرچه انرژی تاریک که مسئول بسط شتابدار عالم کنونی است دارای معادله حالت $P < -\frac{\rho}{3}$ است و ما اینجا با معادله حالت $P = -\frac{\rho}{5}$ سرو کار داریم، اما باز هم این مدل می تواند به عنوان مدلی نمونه از اشیاء فرضی که با فشار منفی شکل گرفته اند، باشد.

علاوه بر این، از منظر ریاضی، یافتن جوابهای ساده معادلات اینشتین که توصیف کننده سیال های کامل باشند، نسبتا مشکل است. اگرچه بیش از یکصد جواب تحلیلی معادلات اینشتین با منبع سیال های کامل وجود دارد که برای توصیف ستاره های نسبیتی یا حداقل برای توصیف نواحی ستاره ای به کار می روند [۶-۸].

در این مقاله جواب به دست آمده در [۱] را امتحان می کنیم و ویژگیهای فیزیکی آنرا استخراج می نماییم. اگرچه جواب های [۱] در مختصات بوچدال^۱ نوشته شده اند، از دیدگاه فیزیکی بهتر است آنها را بر اساس مختصات شوارزشیلد گونه بنویسیم. در ادامه از نشانگان متریک $(-+++)$ استفاده می کنیم و داریم $\kappa \equiv 8\pi G$ که G ثابت گرانش نیوتن است.

معادلات اینشتین با چشمه سیال کامل $P = -\frac{\rho}{5}$

جوابهای پیشنهاد شده توسط [۱] خانواده ای از حلهای شامل چهار پارامتر از معادله اینشتین بدون ثابت کیهانشناسی است. این معادله به صورت زیر است:

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab}R = \kappa T_{ab} \quad (1)$$

که در آن R_{ab} تانسور ریچی، g_{ab} تانسور متریک و R اسکالر ریچی است. ماده چشمه یک سیال کامل با تانسور انرژی-تکانه به شکل زیر می باشد:

$$T_{ab} = (P + \rho)u_a u_b + P g_{ab} \quad (2)$$

که u^a چهار بردار سرعت سیال است و معادله حالت سیال نیز عبارتست از $P = -\frac{\rho}{5}$. جوابهای [۱] به لحاظ هندسی متقارن کروی و ایستا هستند. دو دسته جواب در [۱] به دست آمده و کلی ترین

که این رابطه محدوده شعاع مساحت را به دست می دهد. شعاع مساحت R از مقدار صفر در

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{C_1}} \left(C_1 C_2 - \sqrt{C_1^2 C_2^2 + 4C_1 C_2} \right) \quad (13)$$

شروع می شود و تا مقدار بیشینه زیر افزایش می یابد:

$$R_{\max} = R \left(\frac{C_1 C_2}{\sqrt{C_1}} \right), \quad (14)$$

سپس شروع به کاهش می کند تا اینکه در

$$r_2 = \frac{1}{\sqrt{C_1}} \left(C_1 C_2 + \sqrt{C_1^2 C_2^2 + 4C_1 C_2} \right) \quad (15)$$

دوباره صفر می شود. دو ناحیه مختصاتی $r_1 \leq r \leq C_1 C_2 / \sqrt{C_1}$ و $r_2 \leq r \leq C_1 C_2 / \sqrt{C_1}$ نواحی فیزیکی یکسانی را پوشش می دهند $\bullet \leq R \leq R_{\max}$.

در ادامه ما خود را به ناحیه $r_1 \leq r \leq C_1 C_2 / \sqrt{C_1}$ که در آن $dR/dr > \bullet$ است یعنی ناحیه متناظر با علامت منفی در (11) محدود می کنیم. داریم:

$$C_1 C_2 - \sqrt{C_1^2 C_2^2 + 4C_1 C_2} = \sqrt{C_1^2 C_2^2 + 4(C_1 C_2 - |C_1| R)} \quad (16)$$

حال با جایگذاری عبارت

$$dr = \frac{|C_1|}{C_1 C_2 - \sqrt{C_1^2 C_2^2 + 4C_1 C_2}} dR \quad (17)$$

که دو دیفرانسیل را به یکدیگر مربوط می سازد و نیز استفاده از معادله (16) همان خط (7) به صورت زیر تبدیل می شود:

$$ds^2 = -\frac{|C_1|}{R} dt^2 + \frac{dR^2}{4\left(\frac{R_{\max}}{R} - 1\right)} + R^2 d\Omega_{(2)}^2. \quad (18)$$

معادله $\nabla^c R \nabla_c R = g^{RR} = \bullet$ مکان افق های ظاهری r را مشخص می کند. اگر این معادله یک ریشه تنها داشته باشد، نشاندهنده افق ظاهری یک سیاهچاله یا یک سفید چاله است در حالیکه وجود ریشه دو گانه برای این معادله به وجود گلوگاه افق کرمچاله دلالت می کند.

در مورد متریک (18) تنها یک ریشه R_{\max} یافت می شود و لذا هیچ افق ظاهری برای $R < R_{\max}$ نداریم. معنی فیزیکی ریشه R_{\max} را در ادامه جستجو خواهیم کرد.

چگالی انرژی

$$\rho(R) = \frac{\Delta \kappa C_1^2}{g^2(r)} = \frac{\Delta \kappa}{R^2} \quad (19)$$

و فشار $P = -\rho/5$ که همواره غیر صفرند، در مبدأ $R = \bullet$ که متناظر با $r = r_1$ است، واگرا می شوند. همچنین اسکالر ریچی که به شکل زیر است:

$$R = -\kappa T = \kappa(\rho - 3P) = \frac{\Delta \kappa}{5} \rho = \frac{\Delta \kappa^2}{R^2} \quad (20)$$

نیز در مبدأ واگرا شده و لذا یک تکینگی فضا-زمانی برهنه⁴ در مبدأ داریم.

با وجود تقارن کروی، جرم مایسنر-شارپ-هرناندز⁵ به صورت زیر تعریف می شود:

$$1 - \frac{M_{\text{MSH}}}{R} = \nabla^c R \nabla_c R = g^{RR} \quad (21)$$

حالت این جوابها که توسط چهار ثابت (C_0, C_1, C_2, C_3) پارامتریزه می شوند، به صورت زیر است:

$$ds^2 = -\frac{C_1(C_0 + C_1 r)}{f(r)} dt^2 + \frac{f(r)}{C_1(C_0 + C_1 r)} dr^2 + \frac{f^2(r)}{9C_1^2} d\Omega_{(2)}^2 \quad (3)$$

در متریک فوق $C_1 \neq \bullet$ و $C_0 + C_1 r \neq \bullet$ هستند و تابع $f(r)$ عبارتست از:

$$f(r) = 3(C_1 C_2 + r) + C_2(C_0 + C_1 r)^2 \quad (4)$$

همچنین در همان طول (3) داریم $d\Omega_{(2)}^2 \equiv d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2$ چگالی انرژی و فشار متناظر با جواب (3) عبارتند از:

$$\rho(r) = -\Delta P(r) = \frac{-4\Delta \kappa C_1^2 C_2(C_0 + C_1 r)^2}{f^2(r)} \quad (5)$$

که در آن شرط نامنفی بودن $\rho(r)$ به قید زیر منجر می شود:

$$C_1 C_2 \leq \bullet \quad (6)$$

توجه کنید که حالت خاص $C_2 = \bullet$ متناظر با جواب خلأ می باشد. اما جواب متناظر با $C_1 = \bullet$ با مساوی صفر قرار دادن C_1 در (3) به دست نیامده است بلکه به بحث مجزایی نیاز دارد. این خانواده دوم جوابها با سه ثابت پارامتریزه شده و ما در اینجا بحث خود را محدود به تحلیل این دسته دوم می کنیم (این جواب به عنوان جواب خاص در مرجع [1] نامگذاری شده است).

جواب خاص $C_1 = 0$

دسته جوابهای سه پارامتری (C_0, C_2, C_3) با متریک زیر توصیف می شود:

$$ds^2 = -\frac{C_0^2}{g(r)} dt^2 + \frac{g(r)}{C_0^2} dr^2 + \frac{g^2(r)}{C_0^2} d\Omega_{(2)}^2 \quad (7)$$

که در آن $C_0 \neq \bullet$ است و داریم:

$$g(r) = C_0(C_2 + C_3 r) - r^2 \quad (8)$$

$$\rho(r) = -\Delta P(r) = \frac{\Delta \kappa C_0^2}{g^2(r)}. \quad (9)$$

برای حفظ نشانگان متریک بایستی $g(r) > \bullet$ باشد. در واقع چنانچه $g(r)$ منفی شود ویژگی زمان گونه و فضا گونه مختصه های t و r همانند هندسه شوارزشیلد در افق $r = 2m$ ، عوض می شود. ما همان خط (7) را بر حسب شعاع مساحت² بازنویسی می کنیم. برای اینکار با حل رابطه زیر

$$r^2 - C_0 C_3 r + (|C_0| R - C_0 C_2) = \bullet \quad (10)$$

داریم:

$$r(R) = \frac{1}{2} \left(C_0 C_3 \pm \sqrt{C_0^2 C_3^2 + 4(C_0 C_2 - |C_0| R)} \right). \quad (11)$$

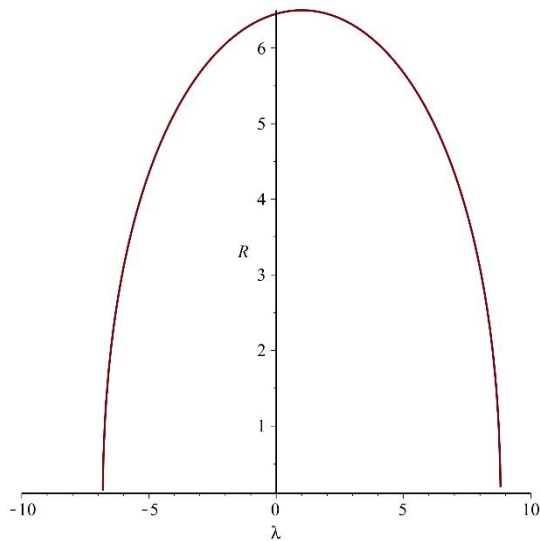
جمله زیر رادیکال در سمت راست بایستی نامنفی باشد تا r حقیقی باقی بماند. لذا داریم:

$$\bullet \leq R < \frac{C_0^2 C_3^2 + 4C_0 C_2}{4|C_0|} \equiv R_{\max} \quad (12)$$

⁴ Naked space-time singularity
⁵ Misner-Sharp-Hernandez

² Areal radius
³ Apparent horizon

همچنین در $R = R_{\max}$ ، $dR/dt = 0$ است. ژئودزیکهای خروجی که از نزدیکی مبدأ شروع می شوند بسیار سریع هستند و همچنانکه به بیشینه شعاع ممکن R_{\max} می رسند، آهسته می شوند تا اینکه با سرعت صفر قابل دسترس اند (شکل ۱ را ملاحظه نمائید).



شکل ۱: شعاع مساحت R برحسب پارامتر افین λ در طول ژئودزیکهای شعاعی صفر به ازای مقادیر $C_1 = C_2 = 2$ ، $C_3 = 3$ و $\lambda_0 = 1$.

یک ژئودزیک صفر که دقیقاً در R_{\max} آغاز می شود دارای سرعت صفر است و همانجا باقی می ماند. ژئودزیکهای خروجی که در نزدیکی R_{\max} آغاز می شوند نیز همچنانکه به تکینگی برهنه در مبدأ نزدیک می شوند، شتاب می گیرند. در آنجا آنها دارای سرعت بی نهایت هستند $dR/d\lambda \rightarrow -\infty$.

همچنین می توان ژئودزیکهای زمان گونه شعاعی را با مماسهای $u^c u_c = -1$ بهنجارش نمود. مطالعه نمود. بهنجارش $u^\mu = (u^t, u^r, 0, 0)$ نتیجه می دهد:

$$u^t = \pm \frac{2}{\sqrt{R}} \sqrt{(R_{\max} - R) \left[\frac{|C_1| (u^r)^2}{R} - 1 \right]} \quad (30)$$

که علامت مثبت برای ژئودزیکهای خروجی و علامت منفی برای ورودی هاست. بردار کیلینگ^۹ زمان گونه $\xi^a = (\partial/\partial t)^a$ پایستگی انرژی بر واحد جرم یک ذره با انرژی E در امتداد این منحنی ها را تضمین می کند:

$$E = -g_{ab} \xi^a u^b = \frac{|C_1| u^t}{R} = const. \quad (31)$$

که در آن $u^t > 0$ است زیرا این منحنی ها در جهت آینده هستند چرا که E مثبت است. حال معادله (۳۰) به دست می دهد:

$$u^r = \pm \frac{2}{\sqrt{R}} \sqrt{(R_{\max} - R) \left(\frac{E^2 R}{|C_1|} - 1 \right)} \quad (32)$$

که نتایج زیر را در بردارد:

لذا در مورد هندسه (۱۸) به دست می آوریم:

$$M_{MSH}(R) = \frac{1}{4} (\Delta R - 4R_{\max}) \quad (22)$$

که در ناحیه $0 < R < 4R_{\max}/5$ اطراف تکینگی منفی است. این موضوع عجیب نیست زیرا می دانیم جرم مایسنر- شارپ- هرناندز در نزدیکی تکینگی ها خوش رفتار نیست [۹-۱۰].

اجازه دهید مجدداً به بررسی بیشینه مقدار شعاع مساحت R_{\max} بپردازیم. با وجود اینکه R_{\max} ریشه معادله $\nabla^c R \nabla_c R = 0$ است اما توصیف کننده یک افق نیست. برای درک این حقیقت، آموزنده است که رفتار ژئودزیکهای شعاعی صفر^۶ را بررسی کنیم. همخوانی های ورودی^۷ و خروجی ژئودزیکهای صفر شعاعی با مماسهای $l_{(\pm)}^\mu = dx^\mu/d\lambda$ که λ پارامتر افین در امتداد این منحنی ها است، را در نظر بگیرید. شرط بهنجارش $l_a^{(\pm)} l_{(\pm)}^a = 0$ به دست می دهد:

$$l_{(\pm)}^t = \pm \frac{2}{R} \sqrt{(R_{\max} - R) |C_1|} l_{(\pm)}^r \quad (23)$$

از آنجا که یک بردار صفر را می توان با یک تابع باز مقیاس^۸ نمود، می توانیم $l^t = 1$ را انتخاب نموده و به نتیجه زیر برسیم:

$$l_{(\pm)}^\mu = \left(1, \pm \frac{2}{R} \sqrt{(R_{\max} - R) |C_1|}, 0, 0 \right) \quad (24)$$

دقت کنید که انتخاب $l^t = 1$ به معنی این است که مختصه زمانی t را به عنوان پارامتر افین در امتداد این ژئودزیکهای صفر در نظر گرفته ایم.

حال معادلات مرتبه اول زیر را به دست می آوریم:

$$\frac{dt}{d\lambda} = 1 \quad (25)$$

$$\frac{dR}{\sqrt{R_{\max} - R}} \frac{dR}{d\lambda} = \pm 2\sqrt{|C_1|} \quad (26)$$

با انتگرال گیری داریم:

$$t(\lambda) = \lambda - \lambda_0 \quad (27)$$

$$\sqrt{R_{\max} - R} (R + 2R_{\max}) = \mp 3\sqrt{|C_1|} (\lambda - \lambda_0) \quad (28)$$

که در آن λ_0 یک ثابت انتگرال گیری است.

از آنجا که

$$\frac{dR}{dt} = \frac{dR}{d\lambda} = \pm 2\sqrt{|C_1|} \frac{\sqrt{R_{\max} - R}}{R} \quad (29)$$

که در آن علامت مثبت برای ژئودزیکهای شعاعی خروجی و منفی برای ورودی هاست.

در نزدیکی مبدأ $R = 0$ داریم $dR/dt \sim +\infty$ برای خروجی ها و $dR/dt \sim -\infty$ برای ژئودزیکهای ورودی.

^۸ Rescale
^۹ Killing vector

^۶ Radial null geodesics
^۷ Ingoing congruences

خلاف مدل اپنهایمر-اسنایدر [۱۱] فشار سیال هیچگاه صفر نمی شود و لذا بهترین توصیفی که می توان برای این جوابها داشت این است که نواحی محدودی از درون ستاره ها را با آنها مدلسازی نمود.

مراجع

- [۱] İ. Semiz, "The general static spherical perfect fluid solution with EoS parameter $w = -1/5$," [arXiv:2007.08166 [gr-qc]].
- [۲] D. Horvat and A. Marunović, "Dark energy-like stars from nonminimally coupled scalar field," *Class. Quant. Grav.* ۳۰, ۱۴۵۰۰۶ (۲۰۱۳) [arXiv:1212.3781 [gr-qc]].
- [۳] P. Bhar, "Dark energy stars in Tolman-Kuchowicz spacetime in the context of Einstein gravity," *Phys. Dark Univ.* ۳۴, ۱۰۰۸۷۹ (۲۰۲۱).
- [۴] A. DeBenedictis, R. Garattini and F. S. N. Lobo, "Phantom stars and topology change," *Phys. Rev. D* ۷۸, ۱۰۴۰۰۳ (۲۰۰۸) [arXiv:0808.0839 [gr-qc]].
- [۵] G. Chapline, "Dark energy stars," *eConf C041213*, ۰۲۰۵ (۲۰۰۴) [arXiv:astro-ph/0503200 [astro-ph]].
- [۶] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers, E. Herlt, *Exact Solutions of the Einstein Field Equations* (Cambridge University Press, Cambridge, ۲۰۰۳).
- [۷] M. S. R. Delgaty and K. Lake, "Physical acceptability of isolated, static, spherically symmetric, perfect fluid solutions of Einstein's equations," *Comput. Phys. Commun.* ۱۱۵, ۳۹۵-۴۱۵ (۱۹۹۸) [arXiv:gr-qc/9809013 [gr-qc]].
- [۸] V. Faraoni, *Cosmological and Black Hole Apparent Horizons*, *Lect. Notes Phys.* ۹۰۷ (Springer, New York, ۲۰۱۵).
- [۹] V. Faraoni and A. Giusti, "Unsettling physics in the quantum-corrected Schwarzschild black hole," *Symmetry* ۱۲, ۱۲۶۴ (۲۰۲۰) [arXiv:2006.12577 [gr-qc]].
- [۱۰] V. Faraoni, A. Giusti and T. F. Bean, "Asymptotic flatness and Hawking quasilocal mass," *Phys. Rev. D* ۱۰۳, no.۴, ۰۴۴۰۲۶ (۲۰۲۱) [arXiv:2010.00069 [gr-qc]].
- [۱۱] J. R. Oppenheimer and J. R. Snyder, "On continued gravitational contraction," *Phys. Rev.* ۵۶, ۴۵۵ (۱۹۳۹).

• به ازای انرژی داده شده E , حرکت شعاعی ممکن است اگر

$$R > R_{\min} \equiv \frac{|C_1|}{E^2} \quad (33)$$

در غیر اینصورت u^1 مختلط خواهد شد. حرکت شعاعی در R_{\min} متوقف شده و ذره نمی تواند به مبدأ برسد و این موضوع با این واقعیت که بر اساس معادله (۳۱)، وقتی $u^1 = ER/|C_1| \rightarrow 0$, $R \rightarrow 0$ سازگار است.

• حرکت شعاعی در R_{\max} که برای هر دو دسته ژئودزیکهای ورودی و خروجی صفر می شود، متوقف خواهد شد. در نتیجه ذره ای که در آغاز در R_{\max} است، مستقل از انرژی اولیه اش، در آنجا باقی می ماند.

• از آنجا که R با مقدار R_{\max} محدود شده است، انرژی های ممکن از پایین کراندارند

$$E > \sqrt{\frac{|C_1|}{R_{\max}}} = \frac{\sqrt{2|C_1|}}{\sqrt{C_1^2 C_2^2 + 4C_1 C_2}} \equiv E_{\min} \quad (34)$$

ذراتی با انرژی کمتر از کمینه آستانه E_{\min} حرکت نمی کنند.

نتیجه گیری

در این مقاله، به مطالعه دسته جدیدی از جوابهای متقارن کروی و ایستای معادلات اینشتین پرداختیم که چشمه آنها یک سیال کامل با معادله حالت $P = -\frac{\rho}{5}$ است [۱].

اگرچه در مرجع [۱] دو دسته جواب پیشنهاد شده، ما در اینجا فقط به بررسی حالت خاص جوابها پرداختیم. این دسته جوابها توصیف کننده یک فضای فشرده با تکینگی برهنه مرکزی هستند. جواب های عمومی (۳) و (۵) همواره به ازای $C_2 = 0$ به جواب شوارزشیلد تقلیل می یابند.

این حقیقت که هندسه، همراه با چگالی انرژی و فشار در $R = 0$ تکینه هستند لزوماً به معنی نابودی این جوابها نیست. در واقع این موضوع که جوابهای دارای چشمه سیال معادلات اینشتین فقط نواحی محدودی از ستاره های نسبیتی را مدل سازی می کنند، کاملاً پذیرفته شده است [۶]. اینکه جوابهای [۱] یک فضای فشرده را توصیف می کنند می تواند بیانگر شباهت جوابها با مدل اپنهایمر-اسنایدر [۱۱] بر برای فروپاشی گرانشی به یک سیاهچاله باشد. اما در جوابهای [۱] بر